Письма в ЖЭТФ, том 12, стр. 443 – 447 *5 ноября 1970 г.*

РОЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ В КОСМОЛОГИИ

Я.Б.Зельдович

Рождение элементарных частиц вблизи сингулярности в анизотропных космологических моделях, по грубым полуколичественным оценкам, способно создать плотность энергии достаточную для изотропизации расширения. Если упомянутые оценки правильны, то с учетом рождения частиц степенная ассимптотика сингулярности типа Казнера оказывается внутренне противоречивой применительно к космологии, уцелеть может лишь вырожденный случай фиктивной особенности с показателями 1, 0, 0 или изотропная фридмановская сингулярность. Рождение частиц может оказаться существенным для объяснения наблюдаемого в настоящее время отношения общего числа частиц (главным образом фотонов) к числу барионов.

Вопрос о рождении частиц в космологической задаче рассматривался применительно к изотропному (фридмановскому) решению в работе Паркера [1].

В предлагаемой работе будет рассмотрена сингулярность типа Казнера [см. 2].

$$ds^2 = c^2dt^2 - t^{2p_1}d\xi^2 - t^{2p_2}d\eta^2 - t^{2p_3}d\zeta^2 . \tag{1а}$$

Роль (1) в качестве прототипа наиболее общего решения с особенностью и для описания начальной стадии эволюции Вселенной рассмотрена в работах [3 – 5].

С точки зрения локального ньютоновского наблюдателя в пространстве с координатами $x = t^{p_1}\xi$, $y = t^{p_2}\eta$, $z = t^{p_3}\zeta$ имеет место гравитационный потенциал – см. [6, 7].

$$\phi = -\frac{1}{2t^2}[p_1(p_1 - 1)x^2 + p_2(p_2 - 1)y^2 + p_3(p_3 - 1)z^2], \tag{1б}$$

$$\Delta\phi = 0.$$

Условимся, что $p_1 < p_2 < p_3$, так что $p_1 < 0$ и по оси x потенциал имеет максимум в начале, $\phi = -kx^2$, $k > 0$. Можно предполагать, что такой потенциал благоприятен для рождения пар движущихся в противоположные стороны по оси x со все нарастающей скоростью. По аналогии с рождением заряженных пар в статическом электрическом поле – см. например [8] – найдем полуширину барьера r из условия

$$\phi(r) = \phi(0) - c^2, \quad r = c/\sqrt{k} . \tag{2}$$

Если ширина меньше комптоновской длины волны частицы, то следует ожидать, что вероятность рождения не зависит от массы покоя частиц и дается выражением, следующим из размерности

$$\frac{dn}{dt}\,\frac{1}{см^3 сек} = k^2c^{-3} = \frac{p_1^2(p_1 - 1)^2}{t^4c^3} . \tag{3}$$

Рассмотрение по методу [1] приводит к сходному результату. Строго можно поставить задачу лишь в том случае, если задаться статической метрикой при $t = \pm\infty$ и заменить сингулярность плавными и конечными выражениями метрических коэффициентов в области $-t_0 < t < t_0$.

Статичность при $t = -\infty$ нужна для однозначного определения вакуума, статичность при $t = +\infty$—для однозначного определения числа родившихся частиц. Устранение сингулярности в области $|t| < t_c$ необходимо для получения однозначного решения.

Как показано в работах [1] и [9] рождение частиц определяется отношением $b(t = +\infty)/b(t = -\infty)$ величины $b(t)$ удовлетворяющей уравнению типа

$$\ddot{b} + \omega^2(t)\, b = 0, \tag{4}$$

где ω — есть частота данной собственной моды поля, описывающего частицы.

Кажется парадоксальным тот факт, что частицы появляются на расстоянии $2r$ друг от друга , превышающем ct (см. формулу (2)).

Этот парадокс есть следствие классического описания на языке частиц с определенными координатами явления, которое по существу неразрывно связано с волновыми свойствами материи — прохождения под потенциальным барьером.

Аналогичный парадокс имеет место и в рождении заряженных частиц электростатическим полем E: классические траектории даются выражением

$$x_{\pm} = x_0 \pm \sqrt{\left(\frac{mc^2}{eE}\right)^2 + c^2(t - t_0)^2}\ .$$

Сумма импульсов

p_+ и p_-, где $p = mc\,\beta/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = \dfrac{1}{c}\dfrac{dx}{dt}$ равна $p_+(t) + p_-(t) = 0$.

Это свойство, как и уравнение траекторий лоренцинвариантно. Однако в любой системе интервал между мировыми точками рождения электрона и позитрона пространственно-подобен. Хотя рождение двух частиц пары взаимосвязано, так как e^+ или e^- отдельно родиться не могут, но при классическом описании причинная связь кажется невозможной. Вернемся к задаче о гравитации.

В случае пространственно однородной задачи пространственная функция волнового поля дается плоской волной $\exp(k_1\xi + k_2\eta + k_3\zeta)$, так что волновой вектор и частота (при $m = 0$) даются выражениями

$$\omega^2/c^2 = |k|^2 = k_1^2 t^{-2p_1} + k_2^2 t^{-2p_2} + k_3^2 t^{-2p_3}\ . \tag{5}$$

Уравнение типа (4) решает задачу о поведении классического волнового поля в заданной, зависящей от времени метрике.

Число квантов есть адиабатический [10] инвариант классического поля. Нарушение адиабатической инвариантности в классической задаче $|b_+|/|b_-| > 1$, в согласии с принципом соответствия описывает рождение пар частиц в вакууме в квантовой теории поля.

Приближенные решения (4) имеют вид (полагаем $\omega(t=\infty)=\omega(t=-\infty)$; $n=b_+^2-b_-^2/b_-^2$)

$$n \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\ln\omega}{dt} e^{2i\int\omega dt} dt = \frac{1}{2i}\omega^{-2}\frac{d\omega}{dt} e^{2i\int\omega dt} dt \cong \frac{1}{i}\int \frac{d}{\sqrt{\omega}} \frac{d^2\sqrt{\omega}}{dt^2} e^{2i\int\omega dt}. \tag{6}$$

Ответ зависит в основном от окрестности сингулярности. Грубо можно положить, что рождение происходит вблизи t_0 и рождаются с вероятностью порядка I частицы с $\omega(t_0) < t_0^{-1}$. Плотность этих частиц составит в таком случае

$$n\frac{1}{см^3} = k^3 = \frac{\omega^3}{c^3} = \frac{1}{c^3 t_0^3}. \tag{7}$$

По порядку величины выражение совпадает с тем, что получится из (3) если подставить $n(t_0) \cong t_0 (dn/dt)|_{t=t_0}$. Отличие заключается лишь в множителе, зависящем от p_1 и равном нулю при $p_1=0$. Это отличие не удивительно. Метрика с $p_1=0$ имеет лишь фиктивную особенность, но в постановке задачи (с переходом от сжатия к расширению вблизи сингулярности) такой переход вносит отличную от нуля кривизну. Средняя энергия частиц в момент рождения, соответствующая (7), порядка $\hbar\omega \sim \hbar/t_0$, так что плотность энергии $\epsilon_0 \sim \hbar/c^3 t_0^4$.

Остановимся на том месте, которое спонтанное рождение частиц в гравитационном поле, занимает в общей теории относительности (ОТО).

Классические уравнения

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \kappa T_{ik} \tag{8}$$

несовместимы с рождением частиц: следствием этих уравнений является тождество $T_{i,k}^k \equiv 0$. Пусть начальное состояние представляет собой вакуум, на гиперповерхности $t=const$ или $t=-\infty$ равны нулю T_{ik} и его производные. Тогда из $T_{i,k}^k=0$ следует что вакуум всегда сохраняется.

Следовательно рождение частиц по необходимости связано с поправками к ОТО, а точнее – с квантовыми поправками, поскольку выражение $\epsilon \sim \hbar$.

Квантовые поправки к уравнениям ОТО рассматривались в нескольких работах, как на основе классических уравнений [11, 12] и в самое последнее время в [13], так и в рамках нового подхода [14] к выводу уравнений ОТО. Однако при этом рассматривались "вещественные" поправки порядка квадрата кривизны и высшего порядка, т. е. нелинейное изменение упругости вакуума.

Рождение частиц представляет собой "мнимую" поправку, имеющую смысл "вязкости" вакуума.

Обратимся к космологическим следствиям рождения частиц. После периода интенсивного рождения при t_0 следует расширение с падением плотности энергии по закону

$$\epsilon = \epsilon_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-a}, \qquad \frac{4}{3} \geqslant a \geqslant 1-|p_1|, \tag{9}$$

где показатель a зависит от предположений о взаимодействии частиц [15].

Теперь найдем момент t_1, когда эта плотность энергии окажется достаточной для того, чтобы оказать гравитационное воздействие на метрику и перевести казнеровское решение во фридмановское. Из условия

$$\epsilon(t_1) \approx c^2/Gt^2, \tag{10}$$

получим ответ

$$t_1 = (c^5 G^{-1} \hbar^{-1} t_o^{4-a})^{1/2-a} = (t_o^{4-a} t_p^{-2})^{1/2-a}, \tag{11}$$

где $t_p = 10^{-43}$ *сек.* Следовательно, если начать расчет с $t_o \sim t_p$, то и переход во фридмановское решение произойдет практически в тот же момент, казнеровское решение тут же кончает самоубийством. Остается открытым вопрос о ситуации в случае показателей 1, 0, 0. По-видимому, необходимо более глубокое рассмотрение сингулярности. В рамках модели Фридмана согласно Паркеру [1] при $p = \epsilon/3$, $a(t) \sim \sqrt{t}$ безмассовые частицы не рождаются. Рассмотрим в качестве начального состояния холодный мир с предельно жестким [16] уравнением состояния (m — масса покоя бариона)

$$p = \epsilon = n^2 m^4 c^5 \hbar^{-3}, \qquad a(t) \sim t^{1/3}.$$

Спонтанное рождение (пар) частиц в такой метрике приведет к росту энтропии; задаваясь $t_o \doteq t_p$ получим по порядку величины безразмерную энтропию

$$s \sim \sqrt{\hbar c / GM^2} \sim 10^{18}$$

вместо наблюдаемой $s \sim \gamma/n_b \sim 10^8$, см. [6, 17]. Неисключено, что какая-то модификация уравнения состояния даст правильное s.

Пользуюсь случаем выразить благодарность В.А.Белинскому, В.Л.Гинзбургу, Б.Я.Зельдовичу, Д.А.Киржницу, Н.Б.Нарожному, А.И.Никишову, И.Д.Новикову, А.М.Переломову и В.С.Попову за многократные обсуждения.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 сентября 1970 г.

Литература

[1] L.Parker. Phys. Rev., 183, 1057, 1969.
[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., Изд. Наука, 1967, изд. 5.
[3] В.А.Белинский, И.М.Халатников. ЖЭТФ, 56, 1700, 1969.
[4] C.W.Misner. Phys. Rev. Lett., 22, 1071, 1969.
[5] I.M.Khalatnikov, E.M.Lifshitz. Phys. Rev. Lett., 24, 76, 1970.
[6] Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Релятивистская астрофизика, М., 1967.
[7] А.Г.Дорошкевич, Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. ЖЭТФ, 60, вып. 1, 1971.
[8] Н.Б.Нарожный, А.К.Никишов. ЯФ, 11, 1084, 1970.

9] А.М.Переломов, В.С.Попов. ЖЭТФ, 56, 1376, 1969.

10] Я.Б.Зельдович. ДАН СССР, 163, 1359, 1965.

11] B.S.DeWitt. Phys. Rev., 162, 1254, 1967.

12] R.L.Feynman. Report at Warsaw Conference on Relativity, 1962.

[13] В.Л.Гинзбург, Д.А.Киржниц, А.А.Любушин. ЖЭТФ, 60, вып. 1. 1971.

[14] А.Д.Сахаров. ДАН СССР, 117, 1, 1967.

[15] А.Г.Дорошкевич, Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. ЖЭТФ, 53, 644, 1967.

[16] Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 41, 1609, 1961.

[17] Я.Б.Зельдович. УФН, 89, 617, 1966.