Письма в ЖЭТФ, том 12, стр. 538 – 541 *5 декабря 1970 г.*

КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ КРИТИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

А.М.Поляков

В работах [1, 2] была предложена гипотеза масштабной инвариантности флуктуаций в точке фазового перехода. В работах [3, 4] гипотеза была подтверждена методами теории поля.

В настоящей работе показано, что корреляционные функции в точке перехода обладают инвариантностью относительно преобразований конформной группы, включающей изменение масштаба как частный случай. Это обстоятельство позволяет вычислить в явном виде любые трехточечные корреляторы и существенно ограничить возможный вид многоточечных корреляторов.

Конформная группа [1)] состоит из следующих преобразований:

$$\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x},$$

$$\frac{\mathbf{x}'}{x'^2} = \frac{\mathbf{x}}{x^2} + \mathbf{a}, \tag{1}$$

$$x'_i = a_{ik} x_k + b_i .$$

[1)] Обзор свойств этой группы в лагранжевой теории поля см. [5].

Последнее уравнение — это обычные повороты и смещения, первое — масштабные преобразования. Второе уравнение называется специальным конформным преобразованием. По очевидным причинам мы будем ниже изучать именно это преобразование, причем $\vec{a}$ удобно считать бесконечно малым. При этом преобразование записывается в виде

$$x' - x \equiv \delta x = x^2\vec{a} - 2(\vec{a}x)\,x\,. \tag{2}$$

Из (2) легко получить формулу

$$\delta \ln r_{AB} = -\,\vec{a}(x_A + x_B)\,, \tag{3}$$

где

$$r_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2}\,.$$

Смысл преобразования (2) состоит в том, что в каждой точке пространства происходит бесконечно малое изотропное растяжение в $\lambda(x)$ раз, где

$$\lambda(x) = 1 - 2\vec{a}x + O(a^2)\,. \tag{4}$$

Формула (4) вытекает из (3) при $x_A \to x_B$.

Из результатов работ [1–4] вытекает, что при однородном малом растяжении в $\lambda = 1 + \epsilon$ раз любая флуктуирующая величина ϕ должна меняться следующим образом:

$$\begin{cases} \phi(x) \to \phi'(x') = \lambda^{-\Delta_\phi}\phi(x) \approx \phi(x) - \Delta_\phi \epsilon \phi(x)\,, \\ x' = x + \epsilon x \end{cases} \tag{5}$$

где константа Δ_ϕ — неизвестный критический индекс поля ϕ. Очевидное обобщение (5) для конформных преобразований есть:

$$\delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = 2\Delta_\phi(\vec{a}x)\phi(x)\,. \tag{6}$$

Ниже будет показано, что уравнения теории поля инвариантны относительно одновременных преобразований (2) и (6) и поэтому корреляционные функции не меняются при этих преобразованиях.

Прежде чем дать доказательство, изучим следствия сделанных утверждений.

Рассмотрим трехточечный коррелятор любых полей a, b, c, с размерностями Δ_a, Δ_b, Δ_c

$$G_{III}(r_{12}, r_{13}, r_{23}) = \langle a(r_1)\, b(r_2)\, c(r_3) \rangle\,. \tag{7}$$

При конформном преобразовании точки r_1, r_2, r_3 смещаются и относительные расстояния r_{lk} меняются согласно (3). Соответствующее изменение G есть

$$\delta G_{III} = -\sum_{l,k} \frac{\partial G_{III}}{\partial \ln r_{lk}}\, \vec{a}(r_l + r_k)\,. \tag{8}$$

Эта величина должна равняться изменению G за счет преобразования (5)

$$\delta G_{III} = 2\sum \Delta_i\, \vec{a}\;\, r_i\; G_{III}\ . \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты перед $a r_i$ в (9) и (8) получаем простую систему уравнений для G_{III}, единственное решение которой есть

$$G_{III} = \text{const}\; r_{12}^{(\Delta_c - \Delta_a - \Delta_b)}\, r_{13}^{(\Delta_b - \Delta_c - \Delta_a)}\, r_{23}^{(\Delta_a - \Delta_b - \Delta_c)}\ . \tag{10}$$

Формула (10) подтверждается в плоской модели Изинга, где известно выражение для коррелятора $< \epsilon\,\sigma\,\sigma >$, где ϵ – плотность энергии, а σ – магнитный момент [6, 7]. Для четырехточечной функции аналогичные рассуждения приводят к результату

$$G_{IV} = r_{12}^{(\Delta_b + \Delta_d}\, r_{24}^{\Delta_a + \Delta_c)}\, r_{12}^{(-\Delta_a - \Delta_b}\, r_{23}^{-\Delta_b - \Delta_c)}\, r_{34}^{(-\Delta_c - \Delta_d}\, r_{41}^{-\Delta_d - \Delta_a)} \times$$

$$\times F\left(\frac{r_{13}r_{24}}{r_{12}r_{34}}, \frac{r_{14}r_{23}}{r_{12}r_{34}}\right)\ , \tag{11}$$

где F – произвольная функция. В случае N-точечных корреляторов конформная инвариантность оставляет произвольной функцию $[N(N-3)]/2$ переменных.

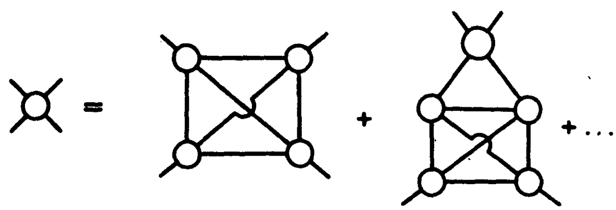

Рис. 1

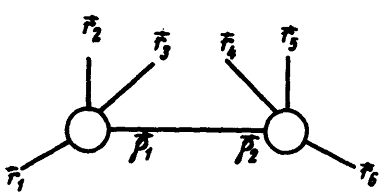

Рис. 2

Уравнения теории поля, описывающие фазовый переход выражают точные амплитуды через самих себя [3,4]. Одно из таких уравнений изображено на рис. 1, где линиям соответствуют корреляторы магнитного момента. Если ряд на рис. 1 сходится, то как было показано в [3] уравнения допускают группу масштабных преобразований и приводят к физической картине работ [1, 2]. Докажем, что при тех же предположениях уравнения являются конформно инвариантными, то есть, что амплитуды вида (10), (11) при подстановке в диаграммы воспроизводят себя. Для доказательства достаточно проверить, что любой элемент диаграммы, содержащий точные амплитуды, например, изображенный на рис. 2, при изменении координат концов r_i согласно (2), умножается на величину $2\sum\Delta_i\,(\vec{a}\,r_i)$.

В координатном представлении вклад рис. 2 можно записать в виде:

$$\int d^3\vec{\rho}_1 d^3\rho_2 G_{IV}(r_1 r_2 r_3 \vec{\rho}_1) H(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}_2) G_{IV}(\vec{\rho}_2 r_4 r_5 r_6) \tag{12}$$

где

$$\left[\int H(\vec{\rho}-\vec{\rho}_1) G_{II}(\vec{\rho}_1-\vec{\rho}\,') d^3\rho_1 = \delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}\,')\right],$$

G_{IV} и G_{II} корреляторы четырех и двух магнитных моментов.

Сместим точки r_i согласно (2) и одновременно произведем замену переменных в (12):

$$\vec{\rho}_l\,' = \vec{\rho}_l + a\vec{\rho}_l^{\,2} - 2(\vec{a}\vec{\rho}_l)\vec{\rho}_l . \tag{13}$$

Интеграл (12) меняется за счет того, что:

$$\begin{aligned} G'_{IV} &= G_{IV}(1 + 2\Delta\Sigma\vec{a}\, r_i + 2\Delta\vec{a}\vec{\rho}), \\ H' &= H\left[1 + 2(3-\Delta)\,\vec{a}\,(\vec{\rho}_1+\vec{\rho}_2)\right], \\ d^3\rho_1' d^3\rho_2' &= d^3\rho_1 d^3\rho_2\left[1 - 6\vec{a}(\vec{\rho}_1+\vec{\rho}_2)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (12) мы видим, что коэффициенты перед $\vec{a}\vec{\rho}_1$ и $\vec{a}\vec{\rho}_2$ обращаются в нуль и весь интеграл умножается на $2\Delta\Sigma\vec{a}\, r_i$, что и требовалось.

Составляя более сложные диаграммы из простых и повторяя проведенные рассуждения можно убедиться, что каждый член ряда на рис. 1 обладает конформными свойствами.

Автор благодарен А.И.Ларкину, А.А.Мигдалу, В.Л.Покровскому за обсуждение и Х.Каструпу (ФРГ) за разъяснение математики конформной группы.

Институт теоретической физики
им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
26 октября 1970 г.

Литература

[1] А.З.Паташинский, В.Л.Покровский. ЖЭТФ, 50, 439, 1966.

[2] L.P.Kadanoff. Physica, 2, 263, 1966.

[3] А.М.Поляков. ЖЭТФ, 55, 1026, 1968.

[4] А.А.Мигдал. ЖЭТФ, 55, 1964. 1968.

[5] G.Mack, A.Salam. Ann. Phys., 53, 174, 1969.

[6] L.P.Kadanoff. Preprint, 1969.