Письма в ЖЭТФ, том 13, стр. 261 – 263 *5 марта 1971 г.*

РОЖДЕНИЕ ПАР e^+e^- В ПЕРЕМЕННОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

В.С.Попов

Взаимодействие электромагнитного поля с вакуумом заряженных частиц приводит к появлению нелинейных добавок к лагранжиану электромагнитного поля L. В частности, возникает мнимая часть $\mathrm{Im}L$, которая определяет вероятность w рождения пар внешним полем. В случае постоянных (во времени и в пространстве) полей E и H возможно точное решение этой задачи; оно было получено в [1] для скалярных и спинорных частиц и в [2] для векторных бозонов с гиромагнитным отношением $g = 2$. В этих работах получено следующее выражение для вероятности рождения пар в постоянном электрическом поле E:

$$w = \frac{(2s+1)\alpha E^2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2}{eE}\right). \qquad (1)$$

Здесь $\hbar = c = 1$, $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, s и m – спин и масса частиц, рождаемых полем E, $\beta_n = (-1)^{n-1}$ для бозонов и $\beta_n = 1$ для фермионов. Показатель экспоненты в (1) имеет вид nE_0/E, где $E_0 = \pi m^2 c^3/e\hbar = 4\cdot 10^{16}$ *в/см* (для электронов; так как $E_0 \sim m^2$, то для других частиц характерная напряженность поля E_0 еще больше). Поэтому для всех мыслимых в настоящее время полей в сумме (1) можно ограничиться первым членом $n = 1$, что (как будет видно ниже) соответствует квазиклассическому приближению.

В данной работе получено обобщение (1) на случаи полей $E(t)$, переменных во времени. С точки зрения теории Дирака, рождение пар e^+e^- соответствует просачиванию электронов с отрицательной энергией через барьер высотой $2mc^2$. В квазиклассическом приближении вероятность рождения пар равна

$$w \sim e^{-Q}, \qquad Q = 2\,\mathrm{Im}S \qquad (2)$$

(с точностью до предэкспоненты), где S – действие, набираемое частицей при движении вдоль подбарьерной траектории. Такое движение, невозможное в рамках классической механики, можно рассматривать как происходящее при чисто мнимых значениях "времени" t (см. работы [3,4], где этот метод был развит применительно к задаче об ионизации атомов переменным электрическим полем). Для нахождения показателя экспоненты Q достаточно найти экстремальную траекторию (минимизирующую $\mathrm{Im}S$), которая в данном случае одномерна. Используя уравнение движения $\dot p = eE(t)$ и выражение $L = -m\sqrt{1-\dot x^2} + eE(t)x$, можно представить действие S в виде

$$S(t) = px - \int_{t_0}^{t} \sqrt{p^2 + m^2}\, dt$$

(для случая, когда поле $E(t)$ однородно в пространстве и направлено по оси x). В плоскости комплексной переменной t действие $S(t)$ имеет точки ветвления t_0, которые находятся из уравнения $p(t_0) = \pm\, im$. Окончательно

$$Q = \oint_C (p^2 + m^2)^{1/2} dt, \qquad (4)$$

где контур C охватывает разрез функции $(p^2 + m^2)^{1/2}$, идущий от $-t_0$ к t_0. Для нахождения t_0 и Q нужно использовать конкретный вид поля $E(t)$. Перейдем к примерам. 1) В случае постоянного поля $E(t) = E$, $p(t) = eEt$. Отсюда $t_0 = im/eE$ и

$$Q = \frac{\pi m^2}{eE} = \frac{E_0}{E}, \qquad (5)$$

что совпадает с первым членом формулы Швингера (1). 2) Для поля $E(t) = E\cos\omega t$ (что соответствует лазерному свету) имеем

$$p(t) = \frac{eE}{\omega}\sin\omega t, \qquad t_0 = \frac{i}{\omega}\,\mathrm{Ar\,sh}\frac{m\omega}{eE}, \qquad (6)$$

и вычисление интеграла (4) дает:

$$Q = \frac{4m^2\sqrt{1+\gamma^2}}{eE\gamma^2}\left\{K\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right) - E\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)\right\}, \qquad (7)$$

где K и E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а γ-параметр адиабатичности[1)]

$$\gamma = \frac{\omega}{\omega_t} = \frac{m\omega}{eE}. \qquad (8)$$

Хотя $\omega \ll m$ и $E \ll E_0$, но γ может меняться в широких пределах от $\gamma = 0$ (постоянное поле) до $\gamma \gg 1$ (в этом случае за время пролета электрона сквозь барьер поле $E(t)$ успевает много раз сменить свой знак). Формула (7) дает непрерывный переход от одной области к другой.

В адиабатической области $\gamma \ll 1$ имеем: $Q = (E_0/E)(1 - \gamma^2/8)$ и (7) переходит в (5), а в противоположном случае $\gamma \gg 1$: $Q = (4E_0/\pi E)(\ln\gamma/\gamma)$, т. е. Q уменьшается с ростом γ. Как и в случае многоквантовой ионизации [5,3], это приводит к резкому возрастанию вероятности w. Выражение (2) в области $\gamma \gg 1$ принимает вид, характерный для теории возмущений N-го порядка

$$w \sim (E/E_1)^{2N}; \quad N = \frac{2m}{\omega}, \qquad E_1 = \frac{m\omega}{e} = \frac{\omega}{\pi m}E_0 \qquad (9)$$

---

1) Здесь ω_t – частота туннелирования. В электрическом поле E ширина барьера $x_0 \sim mc^2/eE$, скорость электрона $\sim c$, откуда $\omega_t = c/x_0$ (ср. с аналогичным определением параметра γ в случае многофотонной ионизации атомов [5]).

(заметим, что $E_1 \ll E_0$). Как видно из (8), параметр γ растет вместе с частотой поля ω.

Условиями применимости квазиклассики являются:

$$E \ll E_0 = \frac{\pi m^2}{e}, \qquad \omega \ll m. \tag{10}$$

3) В качестве последнего примера рассмотрим импульсное поле вида[1]: $E(t) = E(\mathrm{ch}\,\omega t)^{-2}$. Здесь $t_0 = \frac{i}{\omega}\,\mathrm{arc\,tg}\,\gamma$,

$$Q = \frac{2\pi m^2}{E(1+\sqrt{1+\gamma^2})} = \begin{cases} \dfrac{E_0}{E}\left(1 - \dfrac{1}{4}\gamma^2\right), & \text{при } \gamma \ll 1 \\[2ex] 2\pi \dfrac{m}{\omega}, & \text{при } \gamma \gg 1 \end{cases}. \tag{11}$$

Основной вывод из рассмотренных примеров состоит в том, что вероятность рождения пар w значительно возрастает при переходе в область $\gamma \gg 1$ (при том же значении напряженности поля E). Квазиклассический метод не требует точного решения уравнения Дирака (что возможно лишь в исключительных случаях) и потому применим к широкому классу полей. С его помощью можно найти не только экспоненту $\exp(-Q)$ в формуле для w, но и точный вид предэкспоненциального множителя, а также учесть влияние магнитного поля H. Недостаток места не позволяет нам остановиться здесь на этих вопросах.

Автор признателен А.М.Переломову и М.В.Терентьеву за неоднократные полезные обсуждения в ходе работы, а также И.Ю.Кобзареву за обсуждение результатов.

Институт теоретической
и экспериментальной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
25 января 1971 г.

Литература

[1] I. Schwinger. Phys. Rev., 82, 664, 1951.

[2] В.С.Ваняшин, М.В.Терентьев. ЖЭТФ, 48, 565, 1965.

[3] А.М.Переломов, В.С.Попов, М.В.Терентьев. ЖЭТФ, 51, 309, 1966.

[4] В.С.Попов, В.П.Кузнецов, А.М.Переломов. ЖЭТФ, 53, 331, 1967.

[5] Л.В.Келдыш. ЖЭТФ, 47, 1945, 1964.

[6] Н.Б.Нарожный, А.И.Никишов. ЯФ, 11, 1072, 1970.

---

[1] Отметим, что для поля этого вида недавно было получено точное решение уравнения Дирака и найден точный вид w; см. работу [6].

Письма в ЖЭТФ, том 13, стр. 264 – 266 5 марта 1971 г.

ХОЛОДНЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

С.И.Шевченко

В однородных полупроводниках ток всегда направлен по электрическому полю. В неоднородных полупроводниках, где полный ток состоит из дрейфового тока и тока диффузии, в зависимости от полярности приложенного напряжения полный ток может быть направлен как по, так и против внутреннего электрического поля. В последнем случае поле приводит не к разогреву, а к выстуживанию электронного (или дырочного) газа, причем выстуживание это может быть весьма значительным, если внутреннее поле в полупроводнике велико.

Чтобы найти температуру электронного газа T в стационарных условиях (мы для определенности рассмотрим донорный полупроводник, в котором концентрация доноров N_d есть функция x) необходимо приравнять мощность, получаемую электронами от решетки P, мощности, отдаваемой электрическому полю JE. Мощность (см., например, [1])

$$P = C\,\frac{T - T_0}{\tau_e}\,, \qquad (1)$$

где C – теплоемкость электронного газа, T_0 – температура решетки, τ_e – время свободного пробега относительно столкновений с потерей энергии.

В случае, когда температура решетки достаточно высока и все доноры ионизированы, а характерное расстояние L, на котором меняется концентрация примеси, много больше дебаевской длины L_D, ток J можно записать в виде

$$J = \frac{e^2 N_d \tau_p}{m}\left(E - \frac{T}{e}\,\frac{1}{N_d}\,\frac{dN_d}{dx}\right), \qquad (2)$$

где τ_p – время свободного пробега относительно столкновений с потерей импульса. При написании этого выражения предполагалось также, что соотношение Эйнштейна между коэффициентом диффузии и подвижностью остается справедливым при любых полях E и что $(dN_d/dx)/N_d = \mathrm{const}$.

Обычно рассеяние энергии электронов происходит за счет столкновения с акустическими фононами, так что $\tau_e(T) = \tau_e(T_0)(T_0/T)^{1/2}$. Рассеяние же импульса может происходить как на акустических фононах, так и на ионизированных примесях. В интересующей нас ситуации выстуживания электронного газа при достаточно низкой температуре электронов будет преобладать рассеяние на примесях. При этом $\tau_p(T) = \tau_p(T_0)(T/T_0)^{3/2}$.

Умножая теперь (2) на E и приравнивая (1), приходим к следующему уравнению для температуры электронов

$$\theta^2 - \theta\left(\frac{E}{E_0} - \frac{E_*}{E}\right) - \frac{E_*}{E} = 0. \qquad (3)$$