Письма в ЖЭТФ, том 13, стр. 372 – 376 *5 апреля 1971г.*

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР ПИОНА В ДУАЛЬНОЙ РЕЗОНАНСНОЙ МОДЕЛИ

Г. С. Ирошников, А. С. Чернов

В данной работе мы покажем, что формфакторы, предложенные в [1 – 4], могут быть получены из соотношения унитарности для матричного элемента электромагнитного тока

$$\mathrm{Im} < p_1, p_2 | J_\mu (0) | 0 > = \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_n \delta^4 (p_1 + p_2 - p_n) < p_1, p_2 | T^+ | n > < n | J_\mu (0) | 0 > \quad (1)$$

если в нем пренебречь всеми промежуточными состояниями, кроме двухпионного. Здесь T – матрица рассеяния, а пионный изовекторный формфактор определяется соотношением

$$< p_1, p_2 | J_\mu (0) | 0 > = (p_1 - p_2)_\mu F(s) , \quad s = (p_1 + p_2)^2 . \quad (2)$$

В рамках указанного приближения, формфактор $F(s)$, можно представить в виде

$$F(s) = \Phi(s)\Omega(s) , \tag{3}$$

где $\Phi(s)$ – целая функция, $\Omega(s)$ – функция Омнеса

$$\Omega(s) = \exp\left\{\frac{s}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{ds'\delta(s')}{s'(s'-s-i\epsilon)}\right\}. \tag{4}$$

Равенство следует из того, что $\Phi(s) = F(s)/\Omega(s)$ аналитична в любой конечной части плоскости комплексного s. Функция $\Omega(s)$ зависит от фазы формфактора $\delta(s)$, которая определяется соотношением упругой унитарности

$$\operatorname{Im}F(s) = F(s)f_1^*(s)\theta(s-4\mu^2) = F^*(s)f_1(s)\theta(s-4\mu^2) . \tag{5}$$

Здесь $f_1(s)$ парциальная амплитуда π-π-рассеяния с ℓ, $l = 1$. Последнее равенство в (5) следует из вещественности мнимой части формфактора при действительных s. Для определения фазы $\delta(s)$ рассмотрим парциальную амплитуду $H_1(s) = (16\pi\sqrt{s}/k)f_1(s)$ в модели Венециано [5, 6].

$$H_1(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dzP_1(z)T^{I=1}(s,t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dzP_1(z)[A(s,t)-A(s,u)] =$$

$$= \int_{-1}^{1} dz\,P_1(z)A(s,t) , \qquad t = \frac{s-4\mu^2}{2}(z-1),$$

где $$A(s,t) = -2g^2_{\rho\pi\pi}\frac{\Gamma(1-a_s)\Gamma(1-a_t)}{\Gamma(1-a_s-a_t)}$$

a_s, a_t – линейные ρ-траектории в s-, t-каналах, $a_s = a(s) = a + bs$; $a(0) = 1/2$.

Как отмечалось в [7] дуальная резонансная амплитуда $A(s,t)$ удовлетворяет соотношению унитарности во втором порядке по константе связи.

Используя представление [8]

$$\frac{\Gamma(1+a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k(a+b+k)}{(k+a)(k+b)} \tag{7}$$

разложим амплитуду $H_1(s)$ в бесконечное произведение

$$H_1(s) = \int_{-1}^{1} dz P_1(z) \prod_{J=1}^{\infty} \frac{J(J - a_s - a_t)}{(J - a_s)(J - a_t)} . \qquad (8)$$

В силу условия микропричинности амплитуда $H_\ell(s)$ должна пониматься как предел $H_\ell(s + i\epsilon)$, при $\epsilon \to +0$. Это означает, что полюсные сомножители

$$f_J = \frac{1}{J - a_s - i\epsilon} = \frac{1}{b(m_J^2 - s - i\epsilon)} = \frac{1}{|J - a_s - i\epsilon|} e^{i\delta_J} \qquad (9)$$

должны иметь фазу при $s > 0$, равную

$$\delta_J = \operatorname{arc\,tg} \frac{\epsilon}{J - a_s} . \qquad (10)$$

Полюсы в t-канале приводят к возникновению у $H_\ell(s)$ разрезов $-\infty \leqslant s \leqslant 4\mu^2 - m_J^2$, в чем легко убедиться посредством разложения $A(s,t)$ в ряд $\sum\limits_J C_J(s)/(J - a_t)$ и интегрирования по z. Таким образом, для положительных s $H_1(s)$ можно записать в виде

$$H_1(s) = e^{i\delta_1(s)} h_1(s), \text{ где } h_1(s) = \int_{-1}^{1} dz P_1(z) \prod_{J=1}^{\infty} \frac{J(J - a_s - a_t)}{|J - a_s|(J - a_t)} \qquad (11)$$

вещественная знакопеременная функция и

$$\delta_1(s) = \sum_{J=1}^{\infty} \delta_J(s) . \qquad (12)$$

Из соотношения (5) непосредственно следует, что фаза формфактора $\delta(s)$ равна фазе $\delta_1(s)$. Переходя к пределу $\epsilon \to +0$, получаем из (12) и (10)

$$\delta(s) = \pi \sum_{J=1}^{\infty} \theta(a_s - J) = \pi \sum_{J=1}^{\infty} \theta(s - m_J^2). \qquad (13)$$

Выбрав в качестве переменной интегрирования a_s, введем функцию Омнеса с двумя вычитаниями

$$\Omega(a_s) = \exp\left\{\frac{a_s^2}{\pi} \int_{a(4\mu^2)}^{\infty} [a_s'^2(a_s' - a_s - i\epsilon)]^{-1} \delta(a_s')\, da_s'\right\}. \qquad (14)$$

Принимая во внимание равенство (13), перепишем функцию $\Omega(a_s)$ в виде произведения

$$\Omega(a_s) = \prod_{J=1}^{\infty} \Omega_J(a_s), \quad \Omega_J(a_s) = \exp\left\{a_s^2 \int_J^{\infty} \frac{da_s'}{a_s'^2(a_s' - a_s - i\epsilon)}\right\}. \qquad (15)$$

Выполняя интегрирование в (15), получаем

$$\Omega_J(a_s) = \exp\left\{\ln\left|\frac{J}{J-a_s}\right| + i\pi\theta(a_s - J) - \frac{a_s}{J}\right\} =$$
$$= \exp\left\{\ln\frac{J}{J-a_s} - \frac{a_s}{J}\right\} = e^{-a_s/J}\left(1 - \frac{a_s}{J}\right)^{-1} \tag{16}$$

откуда

$$\Omega(a_s) = \prod_{J=1}^{\infty} e^{-a_s/J}\left(1 - \frac{a_s}{J}\right)^{-1} = \Gamma(1 - a_s)\, e^{-a_s C} \tag{17}$$

C – постоянная Эйлера. Возможный вид целой функции $\Phi(s)$ можно установить лишь с привлечением дополнительных физических требований, прежде всего условия нормировки при $s = 0$ и сходимости на бесконечности $F(s) \to 0$, при $|s| \to \infty$. Этим требованиям не противоречит выбор $\Phi(s)$, приводящий к формфактору типа

$$F(s) = \beta\frac{\Gamma(1 - a_s)}{\Gamma(\lambda - a_s)} \quad . \tag{18}$$

При $\lambda = 5/2$, получаем вполне хорошее согласие с экспериментальными данными при ширине ρ-мезона $\Gamma_\rho = 130$ *мэв*. Функция

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma(1 - a_s)}{\Gamma(5/2 - a_s)} \tag{19}$$

дает $|F(m_\rho^2)|^2 = 56$, $< r_\pi^2 >^{1/2} = 0{,}7 \cdot 10^{-13}$ *см*. Данные эксперимента [9] следующие $|F(m_\rho^2)|^2 = 58{,}3 \pm 5{,}6$, $< r_\pi^2 >^{1/2} = 0{,}8 \pm 10; 0{,}86 \pm 0{,}09$.

Отметим, что в работе [10] параметр λ в (18) определялся из равенства фаз формфактора и парциальной амплитуды. Однако, такой способ является несостоятельным, поскольку фаза целой функции, которая появляется при смещении в область комплексных s, не связана с фазой парциальной амплитуды рассеяния.

Таким образом. приведенный нами расчет функции Омнеса показывает, что полученные в работах [1 – 3] формфакторы удовлетворяют соотношению упругой унитарности.

Московский
инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
24 февраля 1971 г.

Литература

[1] R.Jengo, E.Remiddi. Preprint TH 1050 – CERN, 1969.

[2] H.Suura. Phys. Rev. Lett., 23, 551, 1969.

[3] Y.Oyanagi. Progr. Theor. Phys., 42, 898, 1969; Nucl. Phys., B14, 375, 1969; M.Tokuda , Y.Oyanagi. Phys. Rev., Д1, 2626, 1970.

[4] P.Frampton. Phys. Rev.. Д1, 3141, 1970.

[5] G.Veneziano. Nuovo Cim., 57 A, 190, 1968.

[6] C.Lovelace. Phys. Lett., 28B, 264, 1968.

[7] Di Giacomo et al Phys. Lett., 33B, 171, 1970.

[8] Э.Т.Уиттекер, Д.Н. Ватсон.Курс современного анализа, М., Физматгиз, 1963, т. 2.

[9] C.W.Akerlof et al.Phys. Rev., 163, 1482, 1967; C.Mistretta et al, Phys. Rev. Lett., 20, 1523, 1968; J.E.Augustin et al.Lett. Nuovo Cim., 2, 214, 1969.

[10] T.C.Chia et al, Phys Rev., Д1, 2126, 1970.