Письма в ЖЭТФ, том 14, стр. 267 – 270 20 августа 1971 г.

КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ ЯДЕР

В. С. Попов, Т. И. Рождественская

Критическим зарядом Z_c называется то значение заряда ядра, при котором энергия основного уровня электрона достигает границы нижнего континуума $\epsilon = -1$ ($\hbar = c = m_e = 1$). При $Z > Z_c$ кулоновское поле голого ядра[1)] рождает две электрон-позитронные пары, электроны которых садятся на $1S$-уровень, а позитроны через кулоновский барьер уходят на бесконечность (подробное обсуждение свойств возникающей после испускания позитронов стабильной системы – сверхкритического атома см. в работе [1]). Согласно расчетам [2], для изолированного ядра $Z_c = 170$. Поэтому, несмотря на последние успехи в поисках сверхтяжелых элементов [3, 4], возможность существования ядер с $Z > Z_c$ представляется в настоящее время чисто гипотетической.

По-видимому, более реальным способом проверки теории сверхкритических атомов [1, 5] является наблюдение спонтанного квазистатического рождения позитронов при столкновении тяжелых ядер, например, двух голых ядер урана. Идея такого опыта состоит в том, что при сближении двух ядер на расстояние $R < \hbar/m_e c = 1$ на электрон действует поле, аналогичное кулоновскому полю ядра с удвоенным зарядом $2Z$. Поэтому, например, в предельном случае $R = 0$ (слияние ядер) критический заряд $Z_c(R)$ уменьшается вдвое: $Z_c(0) = (1/2)Z_c(\infty) = 85$. Для количественных предсказаний необходимо рассчитать зависимость Z_c от расстояния между ядрами R. При этом, ввиду большой массы ядер, их можно считать покоящимися (тем более, что вероятность рождения позитронов резко возрастает с уменьшением R, а в момент наибольшего сближения скорость ядер обращается в нуль). Как было показано в [6], для решения этой задачи можно применить вариационный метод. Ниже излагаются предварительные результаты такого расчета.

Движение уровней с ростом Z, зависимость Z_c от радиуса ядра и другие характерные черты релятивистской кулоновской задачи одинаковы как для спинорных, так и для скалярных частиц [2, 5]. Это позволяет начать со случая спина $s = 0$ (уравнение Клейна–Гордона с векторной связью), более простого в вычислительном отношении. Для простоты рассмотрим симметричную задачу двух центров: $Z_1 = Z_2 = Z$. В сфероидальных координатах $\xi = (r_1 + r_2)/R$, $\eta = (r_1 - r_2)/R$ имеем уравнение [6]:

$$\frac{d}{d\xi}\left[(\xi^2 - 1)\frac{d\psi}{d\xi}\right] = 2a\xi\left(R - a\ln\frac{\xi + 1}{\xi - 1}\right)\psi . \qquad (1)$$

---

1) Т. е. ядра, лишенного всех своих электронов. Впрочем, для рождения позитронов при $Z > Z_c$ нужно лишь, чтобы K-оболочка была незаполненной (остальные оболочки атома могут оставаться заполненными). В принципе, подобная ситуация возникает после Оже-эффекта в π- или μ- мезоатомах.

Здесь $\alpha = Z/137$ (Z – заряд каждого из ядер), R – расстояние между ними (в единицах $\hbar/m_e c = 1$). Критическому заряду $Z = Z_c$ соответствует та точка $\alpha = \alpha_c$, в которой у уравнения (1) впервые появляется решение, убывающее на бесконечности:

$$\psi \sim \xi^{-3/4}\exp(-\sqrt{8\alpha R\xi}), \qquad \xi = \frac{2r}{R} \to \infty \quad . \tag{2}$$

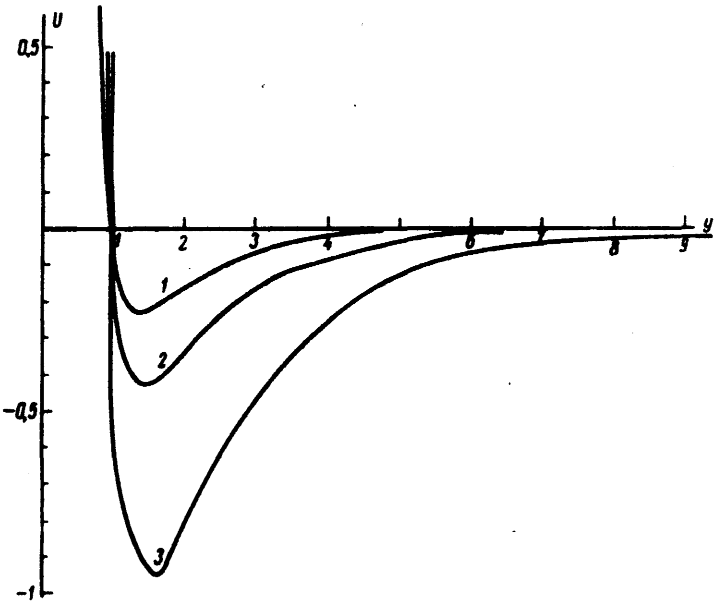

Рис. 1. Эффективный потенциал в уравнении (3). Кривые *1 – 3* соответствуют $\alpha = 0{,}67$ (ядра урана) и $R = 1$; 0,75 и 0,5 (в единицах $\hbar/m_e c$).По оси абсцисс отложена величина $y = 2\alpha x/R$

Замена переменной $\xi = \mathrm{cth}\, x$ приводит (1) к форме, совпадающей с уравнением Шредингера для уровня с нулевой энергией связи:

$$\psi'' - 2U(x)\psi = 0,$$
$$V(x) = \alpha\frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}^3 x}(R - 2\alpha x); \qquad 0 < x < \infty \tag{3}$$

(вид эффективного потенциала $U(x)$ показан на рис. 1). Это уравнение было решено численно; результаты представлены на рис. 2.
Положим

$$\frac{Z_c(R)}{Z_c(\infty)} = f(R) \quad . \tag{4}$$

Функция $f(R)$ показывает, насколько уменьшается критический заряд при сведении ядер на расстояние R (очевидно, что $f(\infty) = 1$, а $f(0) = 1/2$).

Отметим, что уравнение (1) получено в [6] вариационным методом (на классе функций, зависящих от ξ, но не от η, что соответствует усреднению потенциала по переменной η). Поэтому его решение (кривая 1) дает верхнюю границу для $f(R)$. Для проверки точности этого приближения была найдена в аналитическом виде асимптотика $f(R)$ при $R \to 0$. Волновая функция вблизи ядер имеет вид:

$$\psi(\xi, \eta) \sim (\xi^2 - \eta^2)^{\sigma/2}, \qquad \sigma = 1 - \sqrt{1 - 4a^2} \tag{5}$$

(см. [6]). С другой стороны, в области $r_1, r_2 \gg R$ ядра можно рассматривать как единое целое, что дает (при $\epsilon = -1$):

$$\psi = r^{-1/2} K_{i\nu}(\sqrt{8ar}) \sim r^{-1/2} \sin(g\Lambda - g\ln\xi), \tag{6}$$

где $\nu = 2g$, $\Lambda = -(\ln aR + 2\gamma)$, $\gamma = 0{,}577$ – постоянная Эйлера.

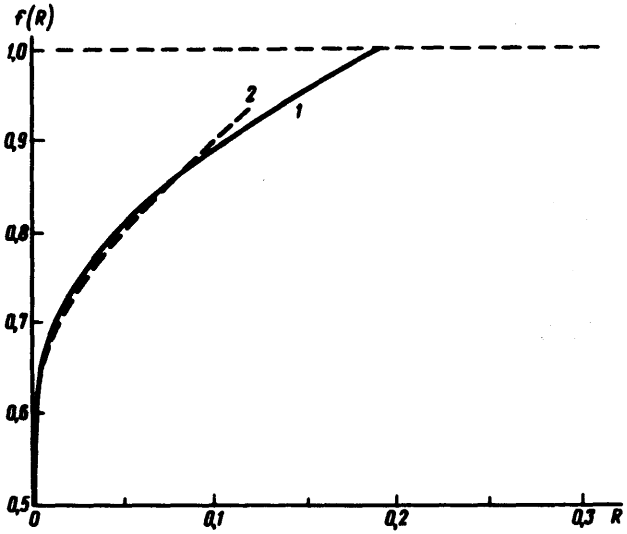

Рис. 2. Уменьшение критического заряда Z_c при сближении ядер. Кривая 1 – результат численного счета, кривая 2 – расчет по уравнению (7)

Выражения (5) и (6) сшиваются в области $R \ll r \ll 1$; это приводит к формуле

$$R = \frac{0{,}315}{a_c} \exp\left\{ -\frac{1}{g} \operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{1 - \sqrt{3 - 4g^2}}{2g} \right) \right\} \tag{7}$$

$$\left(g = 2\sqrt{a_c^2 - 1/16}, \qquad a_c = Z_c/137 \right)$$

асимптотически-точной при $R \to 0$. Сравнение кривых 1 и 2 на рис. 2 показывает, что при $R \lesssim 0{,}1$ погрешность найденного решения невелика.

Итак, функция $f(R)$ из (4) быстро растет в области малых R и при $R > 0{,}3$ она уже близка к единице [1]. Поэтому для заметного уменьше-

[1] Это также согласуется с видом $f(R)$ при $R \to \infty$: $f(R) = 1 - \beta R^{-4}$, причем коэффициент β численно мал ($\beta \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$).

ния Z_c сталкивающиеся ядра должны быть сближены на расстояние $R \sim 0{,}1$, малое по сравнению с комптоновской длиной волны электрона.

Этот вывод сохраняется и для частиц со спином 1/2 (электроны). Приведем здесь лишь аналог формулы (7):

$$R = \frac{0{,}16}{a_c} \exp\left\{-\frac{1}{g} \operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\sqrt{1-a_c^2}}{g}\right)\right\}, \quad g = \sqrt{4a_c^2 - 1}\,. \quad (8)$$

Подробный вывод этих формул, а также формулировка вариационного принципа для критического заряда Z_c в случае частиц со спином 1/2 будут опубликованы отдельно.

Авторы благодарны А.М.Переломову за многочисленные полезные обсуждения в ходе работы.

Поступила в редакцию
5 июля 1971 г.

Литература

[1] Я.Б.Зельдович, В.С.Попов. УФН, **105**, №4, 1971.

[2] В.С.Попов. ЯФ **12**, 429, 1970.

[3] Г.Н.Флеров, В.А.Друин, А.А.Плеве. УФН, **100**, 45, 1970.

[4] A.Marinov, C.J.Batty, A.I.Kilvington, G.W.A.Newton, V.J.Robinson, J.D.Hemingway. Nature, **229**, 464, 1971.

[5] В.С.Попов. ЖЭТФ, **59**, 965, 1970; **60**, 1228 1971.

[6] В.С.Попов. ЯФ, **14**, №2, 1971.