Письма в ЖЭТФ, том 14, стр. 392 – 395 *20 сентября 1971 г.*

ДРЕЙФОВЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ В ТЕОРИИ СЛАБОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А.В.Кац, В.М.Конторович

В теории слабой турбулентности [1, 2], как было показано Захаровым [3], интеграл столкновений I для волн в случае изотропных распределений N_ω обладает симметрией в пространстве частот, позволяющей факторизовать его, что дало возможность найти стационарные неравновесные распределения $N_\omega = \omega^s$ (коэффициенты пропорциональности опущены) для поверхностных гравитационных [4] и капиллярных [5] волн, турбулентной плазмы [6], "акустической" турбулентности в сжимаемой жидкости [7]. Эти распределения подобны распределению Колмогорова [8, 9] в гидродинамической локально-изотропной турбулентности и отвечают постоянному потоку энергии [4 – 6] и частиц [10, 11] в инерционной части спектра.

Равновесному распределению $N^\circ = \omega^{-1}$ отвечает и более общее распределение $N = [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} - \mu)/(1 + \theta)]^{-1}$, обращающее в нуль интеграл столкновений при произвольных дрейфовых параметрах $\mathbf{u}$, μ и θ и соответствующее равновесию при отличном от нуля полном импульсе в системе с измененной температурой и числом частиц.

Однако, для неравновесных распределений ($s \neq -1$) соответствующее утверждение для u и $\mu \neq 0$ не имеет места. Ниже показано, что решения типа дрейфовых (в линейном приближении по $\mathbf{u}$ и μ)

$$N(\mathbf{k}) = \omega^s(1 + \mu\omega^t + \vec{\kappa}\mathbf{u}\omega^p), \qquad \kappa = \mathbf{k}/k, \tag{1}$$

обращающие в нуль интеграл столкновений, тем не менее существуют. Показатели t и p находятся факторизацией интеграла столкновений I, использующей его симметрию в $\mathbf{k}$-пространстве на классе распределений (1). Оказывается, что вообще говоря, (1) отнюдь не соответствует разложению распределения N_ω при замене ω на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u} - \mu$. Кроме того, наряду с дрейфовыми, возникают аналогичные отклонения от изотропного равновесного распределения, на которых мы ниже останавливаться не будем.

В случае четырехчастичного взаимодействия (при нераспадном спектре) [1, 2, 4, 6].

$$I = \int d\tau_k \delta_k U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}[N_1N_2N_3 + NN_2N_3 - NN_1N_2 - NN_1N_3], \tag{2}$$

где $\delta_k \equiv \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)$, $N \equiv N(\mathbf{k})$, $N_1 \equiv N(\mathbf{k}_1)$ и т. п.,

$$U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = U_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}|\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} = U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1|\mathbf{k}_3\mathbf{k}_2} = U_{\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}\mathbf{k}_1}. \tag{3}$$

Для распределения (1) линеаризованный интеграл (2) имеет вид

$$I = I_0 + \mu I_\mu + uI , \qquad (4)$$

где $I_\mu = \int d\tau_k \delta_k U_{kk_1|k_2k_3} (\xi\omega^t + \xi_1\omega_1^t - \xi_2\omega_2^t - \xi_3\omega_3^t),$ (5)

$$\xi \equiv \xi(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3) = \omega^s[(\omega_2\omega_3)^s - (\omega_1\omega_2)^s - (\omega_1\omega_3)^s],$$

$$d\tau_k \equiv dk_1dk_2dk_3,$$

$$\xi_1 \equiv \xi(\omega_1, \omega, \omega_2, \omega_3), \quad \xi_2 \equiv \xi(\omega_2, \omega_3, \omega, \omega_1),$$

$$\xi_3 \equiv \xi(\omega_3, \omega_2, \omega, \omega_1),$$

I_0 с точностью до коэффициента 3 получается из I_μ заменой t на 0,

$$\mathbf{I} = \int d\tau_k \delta_k U_{kk_1|k_2k_3} (\vec{\kappa}\xi\omega^p + \vec{\kappa}_1\xi_1\omega_1^p - \vec{\kappa}_2\xi_2\omega_2^p - \vec{\kappa}_3\xi_3\omega_3^p). \quad (6)$$

Благодаря однородности закона дисперсии $k = \omega^a$ и вероятности перехода $U_{\gamma k\gamma k_1|\gamma k_2\gamma k_3} = \gamma^m U_{kk_1|k_2k_3}$, интегралы (4) могут быть факторизованы и представлены в виде:

$$I_\mu = \frac{1}{4}\omega^{\nu_t}\int d\tau_k\delta_k U_{kk_1|k_2k_3}(\xi\omega^t + \xi_1\omega_1^t - \xi_2\omega_2^t - \xi_3\omega_3^t) \times$$

$$\times(\omega^{-\nu_t} + \omega_1^{-\nu_t} - \omega_2^{-\nu_t} - \omega_3^{-\nu_t}), \qquad (7)$$

$$I_u = \frac{1}{4}\omega^{\nu_p}\int d\tau_k\delta_k U_{kk_1|k_2k_3}(\vec{\kappa}\xi\omega^p + \vec{\kappa}_1\xi_1\omega_1^p - \vec{\kappa}_2\xi_2\omega_2^p - \vec{\kappa}_3\xi_3\omega_3^p)\times$$

$$\times(\vec{\kappa}\omega^{-\nu_p} + \vec{\kappa}_1\omega_1^{-\nu_p} - \vec{\kappa}_2\omega_2^{-\nu_p} - \vec{\kappa}_3\omega_3^{-\nu_p}). \qquad (8)$$

Здесь введены обозначения

$$\mathbf{I} = \vec{\kappa} I_u, \quad \nu_t = \nu + t, \quad \nu_p = \nu + p,$$
$$\nu = am + ad(n-1) - 1 + (n-1)s, \qquad (9)$$

в которых d-размерность вектора $\mathbf{k}$, а n – число частиц, участвующих в процессе, равное в (7), (8) четырем. Преобразование, переводящее (5), (6) в (7), (8) состоит в поворотах и растяжениях, переводящих поочередно $\mathbf{k}_i$ в $\mathbf{k}$ с сохранением подобия многоугольника, выражающего закон сохранения импульса. При этом используется как симметрия (3) вероятности перехода, так и соотношения симметрии между приходными и уходными членами в (2). Для I_0 это преобразование приводит интеграл к виду

$$I_0 = \frac{\omega^\nu}{4}\int d\tau_k\delta_k U_{kk_1|k_2k_3}(\omega\omega_1\omega_2\omega_3)^s(\omega^{-s} + \omega_1^{-s} - \omega_2^{-s} - \omega_3^{-s}) \times$$

$$\times(\omega^{-\nu} + \omega_1^{-\nu} - \omega_2^{-\nu} - \omega_3^{-\nu}), \qquad (10)$$

полученному в [3, 4] с помощью преобразования Захарова в ω-пространстве. Из (7) и (6) видно, что существуют решения с $\nu_t = 0, -1$; $\nu_p = -a$.

Аналогичное преобразование для трехчастичных процессов (в случае распадного спектра) приводит в выражению

$$I_{v}^{(3)} = \frac{\omega^{\nu_p}}{3} \int d\tau_k^{(3)} \delta_k^{(3)} U_{\mathbf{k}|\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} (\vec{\kappa}\, \xi^{(3)} \omega^p - \vec{\kappa}_1 \xi_1^{(3)} \omega_1^p - \vec{\kappa}_2 \xi_2^{(3)} \omega_2^p) \times$$

$$\times (\vec{\kappa} \omega^{-\nu_p} - \vec{\kappa}_1 \omega_1^{-\nu_p} - \vec{\kappa}_2 \omega_2^{-\nu_p}), \qquad (11)$$

где

$$d\tau_k^{(3)} = d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 , \quad \delta_k^{(3)} = \delta (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta (\omega - \omega_1 - \omega_2) ,$$

$$\xi^{(3)} = - \omega^s (\omega_1^s + \omega_2^s), \quad \xi_1^{(3)} = \omega_1^s (\omega^s - \omega_2^s) , \quad \xi_2^{(3)} = \omega_2^s (\omega^s - \omega_1^s),$$

а ν и ν_p даются формулой (9) при $n = 3$. Из (11) следует существование решения с $\nu_p = -a$.

Обозначая показатели s, p, t, соответствующие $\nu = 0$, через s_o, p_o, t_o и $\nu = -1$ – через s_1, p_1, t_1 убеждаемся, что $p_o = -a$, $t_o = -1$; $p_1 = 1 - a$, $t_1 = 1$.

Приведем дрейфовые решения, соответствующие известным стационарным распределениям.

	Гравитационные волны	Капиллярные волны	Акустическая турбулентность	Плазменные колебания
d	2	2	3	3
a	2	2/3	1	1/2
n	4	3	3	4
m	6	9/2	3	4
s_o	– 23/3 [10]	–	–	– 11/6 [11]
p_o	– 2	–	–	– 1/2[1)]
t_o	– 1	–	–	– 1[1)]
s_1	– 8 [4]	– 17/6 [5]	– 9/2 [7]	– 13/6 [6]
p_1	– 1	1/3	0	1/2
t_1	1	1	1	1

Найденные решения позволяют рассмотреть задачу об устойчивости стационарных распределений и о втором звуке в слабо турбулентной системе волн. Колебаниям поверхностных волн типа второго звука будет посвящено отдельное сообщение В.К.Гаврикова, Ю.А.Синицына и авторов.

1) Любопытно отметить, что в этом случае решение формально совпадает с "равновесным" (ср. [11]).

Институт радиофизики
и электроники
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
3 августа 1971г.

Литература

[1] А.А.Веденов. Вопросы теории плазмы, 2, 203, Атомиздат, 1963.

[2] Б.Б.Кадомцев. Вопросы теории плазмы, 4, 188, Атомиздат, 1964.

[3] В.Е.Захаров. ПМТФ, вып. 4, 35, 1965.

[4] В.Е.Захаров, Н.Н.Филоненко. ДАН СССР, 170, 1292, 1966.

[5] В.Е.Захаров, Н.Н.Филоненко. ПМТФ, вып. 5, 62, 1967.

[6] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 51, 688, 1966.

[7] В.Е.Захаров, Р.З.Сагдеев. ДАН СССР, 192, 297, 1970.

[8] А.Н.Колмогоров. ДАН СССР, 30, 299, 1941.

[9] И.М.Яглом, А.С.Монин. Статистическая гидромеханика, М., Изд. Наука, 1965.

[10] В.Е.Захаров. Диссертация, Новосибирск, 1967.

[11] Э.А.Канер, В.М.Яковенко. ЖЭТФ, 58, 586, 1970.