Письма в ЖЭТФ, том 14, стр. 472 – 475 20 октября 1971 г.

ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ПЛАЗМЕННОЙ ПОЛОСТИ

Б. А. Трубников

Вычислен спектр излучения, давление которого уравновешивается давлением окружающей плазмы с произвольным профилем плотности.

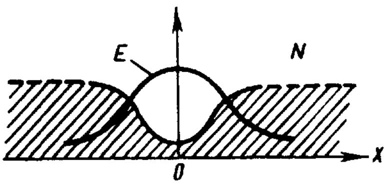
1. В работе Волкова [1] была рассмотрена одномерная "ямка" в плазме, заполненная монохроматическим излучением с частотой ω, давление которого уравновешивается давлением плазмы (рис. 1). Волновое уравнение

$$\Delta E - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}\hat{\epsilon}E = \frac{\partial^2}{\partial x^2}E + k^2(x)E = 0, \quad k(x) = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_o^2(x)}, \tag{1}$$

где $\omega_o(x) = \sqrt{4\pi e^2 N(x)/m}$ приводит при этом к однозначному решению для поля $E_y(x, t) = E_\omega(x)\sin(\omega t + \phi)$, которое в свою очередь считается связанным с плотностью плазмы $N = N_e = N_i$ распределением Больцмана [2, 3] (при $T_+ = T_e + T_i = \text{const}$)

$$N(x) = N(\infty)e^{-U/T_+}, \text{ где } U = \frac{e^2}{4m\omega^2}E_\omega^2(x). \tag{2}$$

Ниже показано, что если отказаться от условия монохроматичности и считать, что в ямке возбуждено большое число собственных колебаний, то эта задача допускает общее решение для произвольного симметричного монотонного профиля плотности $N = N(|x|)$.



2. В приближении геометрической оптики собственные частоты ω_n определяются из условия квантования $\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int k_o(x)\,dx$, дифференцируя которое по n, имеем

$$1 = \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{\pi}\int_{-x_o}^{x_o} k_n(x)\,dx = \int_{-x_o}^{x_o}\frac{\omega_n\partial\omega_o/\partial n}{\pi c^2 k_n(x)}\,dx, \tag{3}$$

что можно рассматривать как условие нормировки собственных функций

$$\psi_n(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{k(x)}}\sin\left(\int_{-x_o}^{x} k(x)\,dx + \frac{\pi}{4}\right) \tag{4}$$

являющихся решениями (1) в приближении ВКБ.

Полагая

$$E_y(x,t) = \sum_n E_n(x)\sin(\omega_n t + \phi_n)\,,\quad E_n(x) = A_n\psi_n(x)\,, \tag{5}$$

где ϕ_n и A_n – фаза и амплитуда n-й гармоники, для потенциала (2) имеем

$$U(x) = \frac{e^2}{4m}\sum_n \frac{1}{\omega_n^2} E_n^2(x) \cong \frac{e^2}{4m}\int \frac{1}{\omega_n^2} A_n^2\psi_n^2(x)\,dn =$$

$$= \frac{e^2}{4m}\int \frac{A_n^2}{\omega_n^2}\,\frac{\omega_n\partial\omega_n/\partial n}{\pi c^2 k_n(x)}\,dn = \frac{e^2}{4\pi mc}\int\limits_{\omega_o(x)}^{\omega_o(\infty)} \frac{A_n^2\,d\omega_n}{\omega_n\sqrt{\omega_n^2-\omega_o^2(x)}}\,. \tag{6}$$

Здесь мы заменили сумму на интеграл и учли нормировку (3) функции $\psi_n^2(x)$. Между тем, из (2) имеем

$$U(x) = T_+ \ln\frac{1}{g(x)}\,,\quad \text{где}\quad g(x) = N(x)/N(\infty). \tag{7}$$

Приравнивая (6) и (7) и введя новую переменную интегрирования $s = \omega_n^2/\omega_o^2(\infty)$, получим интегральное уравнение Абеля

$$\ln\frac{1}{g} = \int\limits_g^1 \frac{f(s)\,ds}{\sqrt{1-g}}\,,\qquad \text{где}\quad f(s) = \frac{e^2\omega_o(\infty)}{8\pi mcT_+}\,\frac{A_n^2}{a_n^2}\,. \tag{8}$$

Его решением является функция

$$f(s) = \frac{2}{\pi\sqrt{s}}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-s}{s}}\,, \tag{9}$$

которая позволяет определить амплитуды A_n и тем самым любые характеристики – в частности – спектр излучения, уравновешивающего заданный профиль $g(x)$.

Можно показать, что сходным образом решается и обратная задача определения уравновешивающего профиля плотности по заданному спектру w_ω полной энергии излучения

$$w = \int w_\omega\,d\omega\,,\qquad w_\omega = \frac{1}{8\pi}A_n^2\,\frac{dn}{d\omega_n} \tag{10}$$

причем спектр w_ω должен удовлетворять определенным условиям, на чем мы не будем останавливаться.

3. Пользуясь, как и выше, приближением геометрической оптики, рассмотрим трехмерную сферически-симметричную "ямку" с профилем плотности $N = N(r)$. Движение поперечных квантов в неоднород-

ной плазме описывается уравнениями

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\mu}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{a}{\omega_k} \nabla N(r) = \mathbf{F}_k, \tag{11}$$

где $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, $H = \hbar\omega_k$, $\omega_k = \sqrt{\omega_0^2(\mathbf{r}) + c^2 k^2}$, $\mu = H/c^2$,

$a = 2n\hbar e^2/m$.

Если Φ_k – функция распределения квантов, нормированная так, что $\int \Phi_k d\mathbf{k}$ равен числу квантов в единице объема, то потенциал (2) и локальная плотность энергии излучения определяются интегралами

$$U(\mathbf{r}) = a\int \frac{\Phi_k}{\omega_k}\, d\mathbf{k}, \quad w(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} E^2 = \int \hbar\omega_k \Phi_k d\mathbf{k} \tag{12}$$

причем в равновесии (см. (2)) $U = T_+ \ln(1/g(\mathbf{r}))$,
где $g(\mathbf{r}) = N(\mathbf{r})/N(\infty)$ $(g(\infty) = 1)$. Можно показать, что решение с локально-изотропным излучением, когда $\Phi_k = f(|\mathbf{k}|)$, здесь отсутствует и простейшим случаем является излучение, состоящее из квантов, движущихся лишь по круговым орбитам вокруг центра ямки. Приравнивая градиентную силу (11) центробежной силе, имеем

$$\frac{a}{\omega_k}\frac{\partial N}{\partial z} = \mu\frac{v_\perp^2}{r}, \text{ иначе } \quad c^2k^2 = \omega_0^2(\infty)\frac{r}{2}\frac{\partial g}{\partial r}. \tag{13}$$

Поэтому на окружности данного радиуса r могут двигаться лишь кванты с частотой

$$\omega_k = \sqrt{\omega_0^2(r) + c^2k_\perp^2} = \omega_0(\infty)\sqrt{g + \frac{r}{2}\frac{\partial g}{\partial r}}, \tag{14}$$

а величины w и U связаны соотношением

$$w(r) = \left(2N + r\frac{\partial N}{\partial r}\right)U(r) = T_+ N(\infty)\left(2g + r\frac{\partial g}{\partial r}\right)\ln\frac{1}{g} \tag{15}$$

и связь (14) частоты с радиусом позволяет рассчитать все спектральные характеристики подобного анизотропного излучения, захваченного в сферической полости.

4. Последняя система может представлять определенный интерес в связи с гипотезой Даусона и Джонса [4] о шаровой молнии как о сферической полости с излучением, давление которого уравновешено наружным давлением атмосферы. В работе [4] однако предполагалось, что в полости (с размером ~ 10 *см*) возбуждены лишь несколько первых мод колебаний и возникал вопрос (наряду со многими другими вопросами) откуда в грозовых разрядах может возникнуть мощное радиоизлучение с длинами волн порядка 10 *см*. По мнению автора снижение характерных длин волн до миллиметрового или даже субмиллиметрового диапазона (такие длины волн можно было бы приписать синхротронному излучению обычных молний) позволяет дополнить модель [4] гипотетическим механизмом образования шаровой молнии за счет

радиоизлучения, "выдавливаемого" из скинированного канала обычной молнии с последующим образованием автономной полости,экранированной плазменной оболочкой. Возникающие здесь проблемы автор надеётся обсудить в отдельной работе.

Поступила в редакцию
9 сентября 1971 г.

Литература

[1] Т.Ф.Волков. Сб. "Физика плазмы и проблема УТР", М., Изд. АН СССР, 1958, том III, стр. 336.

[2] А.В.Гапонов, М.А.Миллер. ЖЭТФ, 34, 242, 1958.

[3] Г.А.Аскарьян. ЖЭТФ, 42, 1567, 1962.

[4] G.A.Dawson, R.C.Jones. Pure and Appl. Geophys., 75, 247, 1969.