Письма в ЖЭТФ, том 14, стр. 564.– 568 20 ноября 1971 г.

О ХАРАКТЕРЕ ОСОБЕННОСТИ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЯХ ПРИ САМОФОКУСИРОВКЕ

В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах

1. При распространении света в самофокусирующей среде возникают локальные области большой амплитуды -фокусы. Настоящая работа посвящена изучению структуры волнового поля вблизи такого рода фокусов, а также структуры пучка с большим количеством фокусов.

Из квазиоптического уравнения [1, 2]

$$i\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{1}{2}\Delta_{\perp}E+|E|^2E=0 \qquad (1)$$

следует (см. [3]) соотношение

$$\int r^2|E|^2\,d\mathbf{r}=\frac{1}{2}I_2z^2+C_1z+C_2. \qquad (2)$$

Здесь

$$I_2=\frac{1}{2}\int(|\nabla_{\perp}E|^2-|E|^4)\,d\mathbf{r}$$

есть интеграл уравнения (1), а C_1 и C_2 – константы.

При $I_2<0$ соотношение (2) не может быть выполнено для всех $z>0$, так как его правая часть при $z\to\infty$ становится отрицательной. Поэтому распространение пучка с отрицательным I_2 приводит при некотором $z=z_0$ к образованию особенности поля.

Положим $E=A\exp(i\Phi)$; тогда для A и Φ имеем:

$$\frac{\partial A^2}{\partial z}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rA^2\frac{\partial\Phi}{\partial r},$$

$$A\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right)=A^3+\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial A}{\partial r}. \qquad (3)$$

Будем предполагать, что вблизи особенности A и Φ имеют вид

$$A=R(r/f(z))/f(z)-A_0+\delta A+\ldots,$$

$$\Phi=\int\frac{dz}{f^2(z)}+\frac{1}{2}\frac{f'(z)}{f(z)}r^2+\ldots, \qquad (4)$$

$$f(z_0)=0,\quad \frac{1}{2r}\frac{d}{dr}r\frac{dR}{dr}+R^3-R=0.$$

Формулы (4) удовлетворяют уравнениям (3) с точностью до малых членов. Для поправки δA имеем:

$$\frac{1}{2r}\frac{d}{dr}r\frac{\partial}{\partial r}\delta A+\frac{3}{f^2}R^2(r/f)\delta A-\frac{1}{f^2}\delta A=$$

$$=-\frac{3}{f}R^2(r/f)A_0+\frac{1}{2}R(r/f)\frac{f''}{f^2}r^2. \qquad (5)$$

Оператор $L\psi = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\psi}{\partial r} - 3R^2\psi - \psi$ имеет, как показано в [4], в точности одну финитную собственную функцию $\psi_0(r)$. Условие разрешимости уравнения (5) есть ортогональность его правой части к $\psi_0(r/f)$. Это условие дает для f

$$f'' = -3aA_0/f^2, \tag{6}$$

где

$$a = 2\frac{\int\psi_0(r)R^2(r)r\,dr}{\int\psi_0(r)R(r)r^3dr}.$$

Отсюда имеем

$$f \to 3\left(\frac{aA_0}{2}\right)^{1/3}(z-z_0)^{2/3}$$

при $z \to z_0$. Таким образом, вблизи особенности поле растет по обратному степенному закону $A \sim (z_0 - z)^{-2/3}$ и в особенности концентрируется мощность, в точности равная критической мощности $I_0 = \int R^2(r)r\,dr$.

Для интенсивных пучков ($I = \int A^2 r\,dr >> I_0$) положение особенности неустойчивым образом зависит от формы пучка.

2. Теоретические предсказания относительно характера особенности проверялись численным решением уравнения (1). В качестве начальных условий выбирались гауссовы пучки с мощностями в 5 и в 13,5 раз больше критической. Удавалось, без существенной потери точности дойти до амплитуд на оси, примерно в 100 раз превышающих исходные. Обработка таблицы осевых значений $A(z)$ показала, что с точностью до 0,1% участки этой кривой можно аппроксимировать гиперболами $A = A_0/(z-z_0)^a$, причем a/a_0 менялось в пределах от $\sim 0{,}75$ при $A \approx 40$ до 0,9 – 1,1 при $A \approx 100$. Здесь $a_0 = 2/3$ – теоретическое предсказание.

В согласии с теорией при $z \to z_0$ структура пучка в приосевой области представляла плато с резко выраженным на нем колоколообразным профилем. Независимо от мощности пучка в пике оказывалась (с точностью $\sim$ 5%) сосредоточенной мощность, равная критической.

Проверялась также зависимость положения фокуса от начального профиля пучка. Для этого начальная гауссова форма пучка возмущалась синусоидальной добавкой

$$U(r,0) = \exp(-r^2/e^2)\left(1 + \epsilon\cos\frac{2\pi r}{3}\right).$$

При $\epsilon \sim 0{,}1$ положение фокуса смещалось на 50% от исходного, что подтверждает чувствительность положения фокуса к детальной структуре пучка.

3. При ограничении поля в фокусе многофотонным поглощением нарастание поля идет до тех пор, пока не поглотится мощность порядка критической. Если эффективный коэффициент поглощения $\nu_{эфф} = \beta|E|^{2n}$,

то скорость поглощения энергии

$$\frac{d}{dz}\int A^2 dr = r\beta\lambda/f^{2n}(z), \quad \lambda = \int R^{2n+2}(r)\, dr .$$

Отсюда для поля в максимуме имеем

$$E_{max} \sim \left(\frac{1}{\beta}\right)^{2/(4n-3)} .$$

Для двухфотонного поглощения ($n = 1$) $E_{max} \sim 1/\beta^2$. Если $n < 3/4$, нелинейное поглощение не ограничивает поля. В частности, не ограничивает поля линейное поглощение ($n = 0$).

Поле может ограничиваться насыщением нелинейности. Так, например, обстоит дело при самофокусировке в плазме. Тогда нелинейный член в (1) заменится в следующем приближении на $f(|E|^2)E = (|E|^2 - \epsilon|E|^4)E$. При этом уравнение (6) перейдет в

$$f'' = -3aA_0/f^2 + \epsilon/f^5 . \qquad (7)$$

Величина f совершает теперь периодические колебания с $f_{min} \sim (\epsilon/3aA_0)^{1/3}$, что соответствует периодически осциллирующему волноводу [5]. Такой волновод можно трактовать как последовательность особенностей.

4. Факт неустойчивости плоской волны в самофокусирующей среде [6] позволяет думать, что распространение интенсивного пучка будет сопровождаться развитием стохастических явлений. Для проверки этого производилось численное моделирование распространения пучков с $I \sim 10 \div 50 I_0$ в среде с насыщением нелинейности и в среде с трехфотонным поглощением. В среде с насыщением непосредственно после первого фокуса возникает стохастическая картина, состоящая из тонкой нити с мощностью порядка критической, совершающей нерегулярные осевые колебания и широко расходящегося гало, в котором имеют место стохастические радиальные и осевые колебания. Амплитуда поля в гало на 2 – 4 порядка меньше, чем в нити.

В среде с поглощением на не очень больших расстояниях от входа наблюдается многофокусная картина, описанная Луговым и Прохоровым [7, 8]. По мере увеличения z характер этой картины последовательно усложняется, и при $z \sim 15 \div 20$ она становится совершенно стохастической. Наибольшие ($\sim 10\%$) синусоидальные возмущения начального пучка смещают положения фокусов, уменьшают их число с 9 – 10 до 5 – 6 и сдвигают границу стохастичности до $z \sim 10$.

Таким образом, поведение интенсивного пучка в самофокусирующей среде становится стохастичным при любом механизме ограничения амплитуды в фокусе. Развитие стохастичности приводит к нарушению радиальной симметрии и рассеянию основной энергии пучка на угол $\theta \sim (n_0/n_{НЛ})^{1/2}$, который для мощных пучков существенно превышает дифракционный.

Вычислительный центр
Сибирского отделения
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 октября 1971 г.

Литература

[1] В.И.Таланов. Письма в ЖЭТФ, 2, 222, 1965.

[2] P.L.Kelley. Phys. Rev. Lett., 15, 1005, 1965.

[3] В.Н.Власов, В.А.Петрищев, В.И.Таланов. Доклад на IV Всесоюзной конференции по нелинейной оптике. Кишинев, 1970.

[4] В.Е.Захаров. ЖЭТФ, 53, 1735, 1967.

[5] В.Е.Захаров, В.В.Соболев, В.С.Сынах. ЖЭТФ, 60, 136, 1971.

[6] В.И.Беспалов, В.И.Таланов. Письма в ЖЭТФ, 3, 471, 1966.

[7] А.Л.Дышко, В.Н.Луговой, А.М.Прохоров. Письма в ЖЭТФ, 6,655, 1967.

[8] В.Н.Луговой, А.М.Прохоров. Письма в ЖЭТФ, 7, 153, 1968.