Письма в ЖЭТФ, том 14, стр. 607 – 610 *5 декабря 1971 г.*

ОБ ЭФФЕКТЕ СИЛЬНОГО ОТТАЛКИВАНИЯ СОСТАВНЫХ ЧАСТИЦ (ЯДРА, АТОМЫ) НА МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ

А.И.Базь

Рассмотрим столкновение двух составных частиц, состоящих из одинаковых фермионов (два атома, два атомных ядра). Давно известно, что учет принципа Паули должен приводить к сильному отталкиванию между частицами на малых расстояниях и это всегда учитывается, например, при выборе феноменологических потенциалов взаимодействия между атомами. Отталкивание возникает при таких расстояниях r_{12} между частицами, когда они начинают перекрываться своими волновыми функциями. Ниже будет развита квантовомеханическая теория этого эффекта.

Пусть первая частица состоит из A_1 фермионов, ее внутренняя волновая функция есть $\phi_1(\vec{\rho}_1)$, радиус—R_1, а ее центр тяжести находится в точке $\mathbf{r}_1$; через $\vec{\rho}_1$ обозначена совокупность $(3A_1 - 3)$ координат, описывающих относительное движение фермионов в частице. Аналогичные обозначения A_2, $\phi_2(\vec{\rho}_2)$, R_2, $\mathbf{r}_2$ введем и для второй частицы.

Волновую функцию сталкивающихся частиц запишем в виде:

$$\psi = \Phi(\rho)\frac{1}{\sqrt{N}}\hat{A}\left\{z^L\, Y_{LM}(\mathbf{z})\,\phi_1(\vec{\rho}_1)\,\phi_2(\vec{\rho}_2)\right\} \equiv \Phi(\rho)\,w(\vec{\rho}). \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{z} = (A_1A_2/A)^{1/2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ – "приведенное" расстояние между частицами, L – орбитальный момент их относительного движения, $\Phi(\rho)$ – функция, описывающая относительное движение частиц. Символом $\hat{A}$ в (1) обозначается антисимметризация выражения в фигурных скобках по всем $N \equiv A!/A_1!\,A_2!$ перестановкам, переводящим фермионы из первой частицы во вторую и обратно.

Для описания относительного расположения всех $A = A_1 + A_2$ фермионов рассматриваемой нами системы мы ввели в (1) вектор $\vec{\rho}$ в $(3A - 3)$-мерном пространстве относительных координат фермионов. Удобно пользоваться сферической системой координат в этом пространстве. Совокупность $(3A - 4)$ углов обозначим через $\Omega_{\vec{\rho}}$, а длина ρ вектора $\vec{\rho}$ при этом равна

$$\rho^2 = \frac{1}{A} \sum_{i>j}^{A} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \sum_{i=1}^{A} (\mathbf{r}_i - \mathbf{R})^2 \equiv A\overline{\mathbf{r}^2}. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{r}_i$ – координата i-ого фермиона, $\mathbf{R}$ – положение общего центра тяжести, $(\overline{r^2})^{1/2}$ – среднеквадратичный радиус системы. Аналогичным образом вводятся величины ρ_1, Ω_1, и ρ_2, Ω_2 для первой и второй частиц.

Так как при таком введении координат имеем тождественно

$$\rho^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + z^2 = A_1\overline{r_1^2} + A_2\overline{r_2^2} + \frac{A_1A_2}{A} r_{12}^2 \quad (3)$$

и так как первые два члена здесь ограничены (приближенно: $\overline{r_1^2} = \frac{3}{5} R_1^2$ и

$$\overline{r_2^2} = \frac{3}{5} A_2R^2 \quad \text{и} \quad \rho_1^2 + \rho_2^2 = \frac{3}{5} (A_1R_1^2 + A_2R_2^2) \equiv a,$$

где R_i – радиус i-ой частицы), то

$$\rho = \left(\frac{A_1A_2}{A}\right)^{1/2} r_{12} \quad \text{при } r_{12} > R_1 + R_2. \quad (4)$$

Это и оправдывает представление волновой функции всей системы в виде (1).

Для нахождения функции $\Phi(\rho)$ подставим (1) в уравнение Шредингера нашей системы

$$\left(-\frac{h^2}{2m} \sum_{i=1}^{A} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} + \sum_{i>j}^{A} V(ij) - E\right) \Phi(\rho)\, w(\vec{\rho}) = 0, \quad (5)$$

где $V(ij)$ – взаимодействие между i-м и j-м фермионом, m – масса фермиона, а E – полная энергия. Умножая это уравнение слева на $w^+(\vec{\rho})$, интегрируя по $d\Omega_{\vec{\rho}}$ и используя технику, изложенную например в [1], находим для $\Phi(\rho)$ уравнение:

$$-\frac{h^2}{2m}\left[\Phi'' + \frac{\mu'}{\mu}\Phi'\right] + [V(\rho) - \epsilon]\,\Phi(\rho) = 0, \quad (6)$$

где штрих означает дифференцирование по ρ, $V(\rho)$ – определенным образом усредненное взаимодействие фермионов, входящих в наши частицы, ϵ – энергия относительного движения частиц, а

$$\mu = \rho^{3A-4} \int d\Omega_{\vec{\rho}}\, |w(\vec{\rho})|^2. \quad (7)$$

Пользуясь техникой K-гармоник (см. [1]) можно показать далее, что

$$\mu = \begin{cases} \text{const}\ \rho^{2K_m + 3A - 4}; & \rho \ll \rho_0 \\ \rho^{2(L+1)}; & \rho > \rho_0 \end{cases} . \tag{8}$$

Здесь K_m – некое характерное число, вводимое в методике K-гармоник (для фермионов одного типа со спином 1/2 $K_m \approx (3A)^{4/3}/4$ при $A \gg 1$), а ρ_0 – это то значение координаты, при котором происходит "соприкосновение" частиц (см. (3)):

$$\rho_0^2 = a + \frac{A_1 A_2}{A}(R_1 + R_2)^2 . \tag{9}$$

Введя новую функцию $\phi(\rho) = \mu^{-1/2}\Phi(\rho)$ получаем вместо (6) простое уравнение

$$-\frac{h^2}{2m}\phi'' + [V(\rho) + U(\rho) - \epsilon]\phi = 0, \tag{10}$$

имеющее вид радиального уравнения Шредингера для частицы в поле. Появившийся здесь потенциал

$$U(\rho) \equiv \frac{h^2}{2m}\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\left(\frac{\mu'}{\sqrt{\mu}}\right)'$$

и описывает отталкивание частиц, возникающее из-за принципа Паули. Пользуясь (8) находим:

$$U(\rho) = \begin{cases} \dfrac{h^2}{2m}\dfrac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{\rho^2}; & \rho \ll \rho_0 \quad (11\text{а}) \\ \dfrac{h^2}{2m}\dfrac{L(L+1)}{\rho^2}; & \rho > \rho_0 \quad (11\text{б}) \end{cases} .$$

Здесь $\mathcal{L} = K_m + \frac{3}{2}(A - 2)$ – большое число, тесно связанное с полной кинетической энергией A фермионов: выражение в верхней строке формулы (11) есть ни что иное, как минимальное значение кинетической энергии A фермионов, заключенных в сферу $|\vec{\rho}| = \rho$.

Поведение $U(\rho)$ при $\rho \approx \rho_0$ можно понять, выбрав для $\mu(\rho)$ какую-нибудь удобную интерполяционную формулу, например:

$$\mu = \rho^{2(L+1)}\frac{x^\sigma}{x^\sigma + x^{2(L+1)}}; \quad x \equiv \frac{\rho}{\rho_0}; \quad \sigma \equiv 2K_m + 3A - 4. \tag{12}$$

При этом немедленно получаем:

$$U(\rho) = \frac{h^2}{2m\rho^2}\left\{ L(L+1) + \frac{\Gamma(L+1)}{1+x^\Gamma} + \frac{\Gamma}{4}\,\frac{(\Gamma-2)-2(\Gamma+1)x^\Gamma}{(1+x^\Gamma)^2} \right\}, \tag{13}$$

где $\Gamma \equiv \sigma - 2(L+1)$.

Практически во всех случаях $K_m >> 1$ и, тем более, $\sigma >> 1$. При не слишком больших значениях L, когда $\Gamma >> 1$ выражение (13) легко исследуется. При этом оказывается, что формула (11а) справедлива при $\rho \lesssim \rho_o\left(1 - \frac{\ln\Gamma}{\Gamma}\right)$, а формула (11б) – при $\rho > \rho_o\left(1 - \frac{\ln\Gamma}{\Gamma}\right)$.

Если обе сталкивающиеся частицы достаточно "жесткие", т. е. имеют почти определенные значения ρ_1 и ρ_2 (это отвечает малым флюктуациям среднеквадратичного радиуса), то величина ρ и расстояние r_{12} между частицами однозначно связаны формулой (3). Комбинируя (3) и (11)–(13) получаем тогда, что радиус отталкивающей сердцевины равен

$$(r_{12})_{core} = (R_1 + R_2)\left[1 - \frac{A}{A_1A_2}\,\frac{\rho_o^2}{(R_1+R_2)^2}\,\frac{\ln\Gamma}{\Gamma}\right] \approx (R_1+R_2), \tag{14}$$

а ее величина

$$U_{core} \approx \frac{h^2}{2m}\,\frac{\mathcal{Z}(\mathcal{Z}+1)}{\rho^2} \tag{15}$$

как говорилось выше, совпадает с кинетической энергией A фермионов, заключенных внутри сферического обьема с радиусом $R \approx \rho_o/\sqrt{A}$ (ρ_o вычисляется с помощью (9)).

Проведенное выше рассмотрение показывает, что две частицы, составленные из фермионов одного сорта всегда будут отталкиваться, как только расстояние между ними станет меньше их суммарного радиуса. При не слишком больших энергиях соударения частицы вообще не смогут проникнуть внутрь друг друга. В атомной физике это явление давно известно. В ядерной физике аналогичное явление должно наблюдаться при рассеянии ядер друг на друге.

Поступила в редакцию
27 октября 1971 г.

Литература

[1] А.Базь, М.Жуков. ЯФ, 11, 779, 1970.