Письма в ЖЭТФ, том 15, вып 1, стр. 52 – 56 5 января 1972 г.

К ТЕОРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ НЕОДНОРОДНУЮ СРЕДУ, И НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕРАВНОМЕРНО ДВИЖУЩИХСЯ ПУЧКОВ

16

В. А. Буц

В работе [1] показано, что при движении однородного неограниченного электронного пучка через среду со скоростью, превышающую скорость распространения волны в этой среде развивается неустойчивость пучка.

Ниже мы покажем, что экспоненциальный рост возмущений в пучке возникает и тогда, когда условия черенковского излучения не выполнены, но среда неоднородна или частицы пучка движутся с ускорением.

1. Рассмотрим однородный неограниченный пучок, проходящий с постоянной скоростью ($\mathbf{v}_0 \parallel z$) через неоднородный диэлектрик ($\epsilon = \epsilon(z)$). Проследим за развитием малого возмущения в таком пучке. Линеаризованные уравнения, описывающие взаимодействие возмущающего поля с электронным пучком имеют вид

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\epsilon(z)}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \rho),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = \frac{e}{m}\mathbf{E} + \frac{e}{mc}[\mathbf{v}_0 \mathbf{H}].$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 \rho) = 0. \tag{1}$$

Здесь индексами (0) обозначены невозмущенные величины. Выберем зависимость от времени и поперечной координаты в виде $e^{-i\omega t + ik_\perp x}$. Тогда для поля E-волны (E_x, E_z, H_y) получим следующую систему интегродифференциальных уравнений

$$E_x'' + \left(k^2\epsilon - \frac{\omega_b^2}{c^2}\right) E_x = ik_\perp \left[E_z' - \frac{\omega_b^2}{c^2} e^+ \int_0^z E_z e^- dz_1\right],$$

$$E_z(k^2\epsilon - k_\perp^2) + k^2 \frac{\omega_b^2}{v_0^2}\left(1 + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{v_0^2}{c^2}\right) e^+ \int_0^z dz_1 \int_0^{z_1} E_z e^- dz_1 =$$

$$= ik_\perp \left[E_x' - \frac{\omega_b^2}{c^2} e^+ \int_0^z E_x e^- dz_1\right], \tag{2}$$

где

$$E_x' \equiv \frac{\partial E_x}{\partial z};\quad k \equiv \frac{\omega}{c};\quad e^{\pm} \equiv e^{\pm i \frac{\omega}{v_0} z};\quad \omega_b^2 \equiv \frac{4\pi e \rho_0}{m}.$$

Если $k_\perp = 0$, то система (2) распадается на два независимых уравнения, первое из них описывает поперечные волны, второе – продольные колебания. Решение системы (2) будем искать в виде

$$E_x = \mathcal{E}(z)\exp\left[i \int_0^z k_\parallel(z_1)\, dz_1\right];\quad E_z = A\exp\left[i \int_0^z k_\parallel(z_1)\, dz_1\right], \tag{3}$$

где $\mathcal{E}(z)$ и $k_\parallel(z)$ – медленно меняющиеся функции. Подставляя эти выражения в (2) и ограничиваясь членами пропорциональными первой степени параметра $k_\parallel' / k^2$, получим следующее дисперсионное уравнение ($k_\perp = 0$).

$$\epsilon^* \Delta - k_\perp^2 \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}} \epsilon \frac{v_0^2}{c^2} = - i f, \tag{4}$$

где $\epsilon^* \equiv \epsilon - \dfrac{\omega_b^2}{\omega^{*2}}$; $\omega^* = \omega - k_\parallel v_o$; $\Delta = k^2\epsilon - k_\parallel^2 - k_\perp^2 - \dfrac{\omega_b^2}{c^2}$;

$$f \equiv \frac{k_\perp^2}{k^2}\left[2k_\parallel a\left(\frac{a}{\Lambda_\parallel}\right)' + \frac{k_\parallel' a^2}{\Lambda_\parallel}\right] + 3\Lambda_\parallel \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}} \frac{k_\parallel' v_o^2}{\omega^{*2}}\left(1 + \frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{v_o^2}{c^2}\right) +$$

$$+ k_\perp^2 \Delta_\parallel \left[\frac{a}{\Delta_\parallel}\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}}\frac{v_o^2}{c^2}\right)\right]' - a\frac{k_\perp^2}{k^2}\frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}}\frac{v_o^2}{c^2}\frac{k_\parallel' v_o^2}{\omega^{*2}} .$$

Если $\epsilon\,(v_o^2/c^2) \ll 1$ неустойчивость возможна только при учете неоднородности среды. Решая в этом случае уравнение (4), получим

$$k_\parallel = k_{\parallel o}(1 \pm i\gamma) \tag{5}$$

$$k_{\parallel o} \equiv \frac{\omega}{v_o} \pm \frac{\omega_b}{v_o\sqrt{\epsilon}}\,; \quad \gamma = \frac{1}{2}\frac{\epsilon'}{(\epsilon)^{3/2}}\frac{\omega_b\,\omega}{v_o^2}\frac{k_\perp^2}{k_{\parallel o}^3(k_\perp^2 + k_{\parallel o}^2)} \pm$$

$$\pm \frac{3}{4}\frac{\epsilon'}{\epsilon}\frac{1}{k_{\parallel o}}$$

для продольных волн

$$k_\parallel = \pm k_{\parallel o} + \frac{i}{4}\frac{\epsilon'}{\epsilon^*}\frac{k_\perp^2 + 3k_{\parallel o}^2}{k_{\parallel o}^2} \tag{6}$$

$$k_{\parallel o} = \sqrt{k^2\epsilon - k_\perp^2 - \frac{\omega_b^2}{c^2}}\,; \quad \frac{\omega_b^2}{\omega^2} \ll 1\,; \quad \frac{v_o}{c} \ll 1$$

для поперечных волн.

Из формул (5) и (6) следует, что происходит экспоненциальный рост продольных колебаний. Амплитуда поперечных волн меняется только за счет предэкспоненты.

2. Рассмотрим теперь пучок, скорость частиц которого меняется во времени. Исходной системой уравнений будет система (1), в которой надо положить $\epsilon = 1$, Здесь $E_o(t)$ – внешнее электрическое поле, управляющее движением пучка. Из системы (1)для поля E-волны, зависимость от координат которого имеет вид $\exp(i k_\parallel z + i k_\perp x)$, получим

$$H_y'' + (k_\parallel^2 c^2 + \omega_b^2)H_y = ik_\perp c\,[E_z' + \omega_b^2 e^- \int_{-\infty}^{t} E_z e^+ dt_1\,];$$

$$E_z' + \omega_b^2 e^- \int_{-\infty}^{t} E_z e^+ dt_1 - i k_\parallel v_0 \omega_b^2 \left(1 + \frac{k_\perp^2}{k_\parallel^2}\right) e^- \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} E_z e^+ dt_2 =$$

$$= i k_\perp c \left[H_y + i \frac{v_0}{c} \frac{\omega_b^2}{k_\parallel c} e^- \int_{-\infty}^{t} H_y e^+ dt_1 \right],$$

где
$$E_z' \equiv \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad e^\pm \equiv \exp\left[\pm i \int_{-\infty}^{t} k_\parallel v_0 (t_1) dt_1\right].$$

Решение системы (7) будем искать в виде

$$E_z = E \exp\left(-i \int_{-\infty}^{t} \omega(t_1) dt_1\right); \quad H_y = H(t) \exp\left(-i \int_{-\infty}^{t} \omega(t_1) dt_1\right). \tag{8}$$

Подставляя эти выражения в (7) и оставляя члены пропорциональные первой степени параметров ω'/k^2c^2, v_0'/kc^2 получим следующее дисперсионное уравнение

$$\epsilon^* \Delta = if, \tag{9}$$

где
$$f \equiv \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}} \frac{\omega^{*\prime}}{\omega^{*2}} \Delta_\parallel \left[\frac{\omega^*}{\omega} + \frac{3k_\parallel v_0}{\omega}\left(1 + \frac{k_\perp^2}{k_\parallel^2}\right)\right] + k_\perp^2 \left(1 - \frac{\omega_b^2 v_0}{\omega^* k_\parallel c^2}\right) \times$$

$$\times \left\{ \frac{\omega^{*\prime}}{\omega^{*2}}\left(\frac{\omega_b^2}{\omega\omega^*} - \frac{2\omega_b^2}{c^2\Delta_\parallel}\right) - \frac{\omega'}{c^2\Delta_\parallel}\left[2 + \frac{3\omega^2 + k_\parallel^2 c^2 + \omega_b^2}{c^2\Delta_\parallel}\left(1 - \frac{\omega_b^2}{\omega\omega^*}\right)\right]\right\} -$$

$$- k_\perp^2 \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}} \frac{v_0}{c} \frac{1}{k_\parallel c} \left[\frac{\omega'}{\omega} - \frac{\omega^{*\prime}}{\omega^*}\left(1 - 2\frac{\omega_b^2}{\omega\omega^*}\right)\right].$$

Решая это уравнение относительно $\omega(t)$, получим

$$\omega = k_\parallel v_0 \pm \omega_b (1 + i\gamma); \qquad \gamma \approx v_0'/k_\parallel c^2 \tag{10}$$

для продольных волн и

$$\omega = \pm \omega_s (1 + i\gamma_1), \tag{11}$$

$$\gamma_1 \approx \frac{k_\parallel v_0'}{\omega_s^2} \frac{\omega_b^2}{\omega^{*2}} \frac{1}{\epsilon}; \qquad \omega_s \equiv \left[(k_\parallel^2 + k_\perp^2)c^2 + \omega_b^2\right]^{1/2}$$

для поперечных волн.

Формулы (10) и (11) показывают, что неустойчивость развивается как при торможении, так и при ускорении пучка. Кроме того частота продольных колебаний меняется пропорционально изменению скорости пучка.

Из полученных выше результатов следует, что так же как черенковское излучение отдельной частицы пучка приводит к раскачке колебаний, так и излучение отдельных частиц при их прохождении через неоднородную среду или при неравномерном движении приводит к развитию коллективных неустойчивостей пучка. Инкремент нарастания волн при этом зависит как от индивидуальных излучательных способностей каждой частицы ($\partial\epsilon/\partial z$ или $\partial v_0 / \partial t$), так и от коллективных характеристик пучка (ω_b).

В заключение автор благодарит Я.Б.Файнберга и В.И.Курилко за интерес к работе и полезные дискуссии.

Поступила в редакцию
29 октября 1971 г.

Литература

[1] А.И.Ахиезер, Я.Б.Файнберг. ЖЭТФ, 21, 1262, 1951.