Письма в ЖЭТФ, том 15, вып 4, стр. 219 – 224   20 февраля 1971 г.

НЕУПРУГИЕ ВКЛАДЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЙ ФОРМФАКТОР ПИОНА

В. Н. Байер, В. С. Фадин

В последних экспериментах по рождению $\pi^+\pi^-$-пар на встречных электрон-позитронных пучках в Новосибирске [1] и Фраскати [2], в которых измеряется электромагнитный формфактор пиона $F_\pi(s)$, при энергиях $\sqrt{s} = 2\epsilon > 1$ *Гэв* наблюдалось значительное превышение $|F_\pi(s)|$ над кривой Брейта – Вигнера, апроксимирующей $|F_\pi(s)|$ в районе ρ-резонанса [3, 4]. На эксперименте [5, 6] в этой же области энергий установлено также, что с большой вероятностью фотон переходит в многоадронные состояния. В этой связи указанное увеличение формфактора $|F_\pi(s)|$ можно объяснить так: фотон переходит в многоадронные состояния (это происходит с большой вероятностью), которые затем превращаются в пару пионов[1)]. Тем самым оказываются существенными промежуточные состояния с большим числом частиц, иными словами речь идет о неупругих вкладках в соотношение унитарности для формфактора. Это соотношение имеет вид:

$$\mathrm{Im}\,F_\pi(s) = \beta f_{11} F_\pi^-(s)\,\theta(s - 4\mu^2) + \frac{(2\pi)^4}{2} \sum_{\substack{n \neq \pi^+\pi^- \\ (\mathcal{J} = I = 1)}} \delta(p_+ + p_- - p_n) \times$$

$$\times \langle \pi^+\pi^- | T | n \rangle \frac{(p_+ - p_-)^\mu \langle 0 | \mathcal{J}_\mu(0) | n \rangle^*}{(s - 4\mu^2)} = \beta f_{11} F_\pi^-(s)\theta(s - 4\mu^2) + D. \tag{1}$$

Здесь выделен упругий член, выражающийся через амплитуду $\pi\pi$-рассеяния f_{11} в состоянии $I = \mathcal{J} = 1$, $\beta = \sqrt{1 - (4\mu^2/s)}$, μ-масса пиона, $s = (p_+ + p_-)^2$, $p_\pm$-импульсы пионов, $\langle n | \mathcal{J}_\mu(0) | 0 \rangle$ – амплитуда перехода фотона в состояние $| n \rangle$, $F_\pi^\pm(s) = F_\pi(s \pm i\epsilon)_{\epsilon \to 0}$, $F_\pi^-(s) = (F_\pi^+(s))^*$,

$$\mathrm{Im}\,F_\pi(s) = \frac{F_\pi^+(s) - F_\pi^-(s)}{2i}.$$ В принятой нормировке

$$\beta f_{11} = \frac{\eta e^{2i\delta_{11}} - 1}{2i}, \qquad \eta \leqslant 1. \tag{2}$$

В упругой области $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$, $\eta = 1$, $D = 0$.

---

1) Очевидно, что такая картина может иметь место для электромагнитных формфакторов K, p и т. д.

Проведя комплексное сопряжение соотношения (1) получаем другое соотношение для $F_\pi^+(s)$, $F_\pi^-(s)$, которое в упругой области ($s \leqslant 16\mu^2$) совпадает с (1). В неупругой же области разрешая найденное соотношение совместно с (1) можно получить алгебраическим путем явное выражение для формфактора $F_\pi(s)$, считая заданными f_{11} и D

$$F_\pi^+(s) = \frac{4D}{1-\eta^2}\,\frac{1}{2i}\left(\eta\, e^{2i\delta_{11}}\frac{D^*}{D} - 1\right). \tag{3}$$

Это представление формфактора удобно тем, что оно, в отличие от обычных дисперсионных соотношений, связывает величины, взятые при одной энергии.

Стоящие в правой части (3) величины не являются независимыми. Связь между ними (не имеющую, конечно, локального характера) можно получить рассматривая дисперсионные представления для $F_\pi(s)$. Обычным приемом [7, 8] при таком рассмотрении является введение функции

$$X(s) = \exp\left[\frac{s}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty}\frac{ds'\delta_{11}(s')}{s'(s'-s)}\right].$$

Тогда реальная функция $\Phi_\pi(s) = F_\pi(s)/X(s)$ имеет разрез при $s \geqslant 16\mu^2$, $\Phi_\pi(0) = F_\pi(0) = 1$, на разрезе выполняется соотношение:

$$\Phi_\pi^+(s) = \eta(s)\,\Phi_\pi^-(s) + C(s), \qquad C = \frac{2iD}{X^+}, \tag{4}$$

где $X^\pm(s) = X(s \pm i\epsilon)$. Это соотношение позволяет, аналогично (3), определить $\Phi_\pi(s)$ на разрезе

$$\Phi_\pi^\pm(s) = \frac{\operatorname{Re} C(s)}{1-\eta(s)} \pm i\,\frac{\operatorname{Im} C(s)}{1+\eta(s)}. \tag{5}$$

Отсюда вытекает следующее дисперсионное соотношение для формфактора:

$$F_\pi(s) = X(s)\left[P_{n-1}(s) + \frac{s^n}{\pi}\int_{16\mu^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} C(s')\,ds'}{(1+\eta(s'))\,s'^n(s'-s)}\right], \tag{6}$$

где $P_{n-1}(s)$ – полином степени $n-1$, здесь сделаны n вычитаний. Если принять, что $X(s)$ дается моделью векторной доминантности, а $F_\pi(s)$ убывает с ростом s, то можно ограничиться одним вычитанием [1], тогда

$$F_\pi(s) = X(s)\left[1 + \frac{s}{\pi}\int\limits_{16\mu^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} C(s')\,ds'}{(1+\eta(s'))\,s'(s'-s)}\right] \qquad (7)$$

Как уже отмечалось, функции, стоящие в правой части (3) не являются независимыми. Из (5) и (7) вытекает следующая связь:

$$\frac{\operatorname{Re} C(s)}{1-\eta(s)} = 1 + \frac{s}{\pi}\,\mathcal{P}\!\int\limits_{16\mu^2}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} C(s')\,ds'}{(1+\eta(s'))\,s'(s'-s)}\,. \qquad (8)$$

Аналогично (6) можно получить дисперсионное соотношение, выражающее $F_\pi(s)$ через интеграл от $\operatorname{Re} C(s)/(1-\eta(s)$ по разрезу и связь типа (8).

Для нахождения формфактора $F_\pi(s)$ необходимо знать величину D. Для нее можно получить строгое неравенство. Учтем, что

$$\sigma'_{e^-e^-\to h} = \frac{8\pi^2 a^2}{s^2(s-4\mu^2)} \sum_{\substack{n\neq\pi^+\pi^-\\ (\mathcal{J}=I=1)}} |\langle 0\,|\,(p_+-p_-)^\mu \mathcal{J}_\mu(0)\,|\,n\rangle|^2 \times$$

$$\times(2\pi)^4\,\delta(p_+ + p_- - p_n),$$

$$1-\eta^2 = \frac{\beta}{24\pi}\sum_{\substack{n\neq\pi^+\pi^-\\ (\mathcal{J}=I=1)}} |\langle\pi^+\pi^-\,|\,T\,|\,n\rangle|^2 (2\pi)^4\,\delta(p_+ + p_- - p_n), \qquad (9)$$

где $\sigma'_{e^+e^-\to h} = \sigma_{e^+e^-\to h} - \sigma_{e^+e^-\to\pi^+\pi^-}$, $\sigma_{e^+e^-\to h}$ – полное сечение образования адронов при аннигиляции электрон-позитронной пары в однофотонном канале с $I = 1$. Тогда используя неравенство Коши – Буняковского имеем из (1):

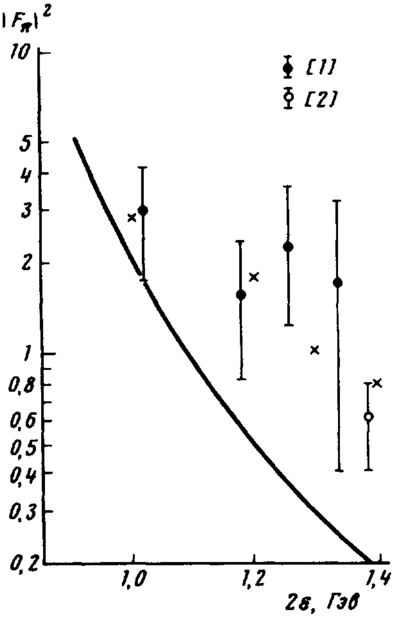
$$|D| \leqslant \sqrt{\frac{\sigma'_{e^+e^-\to h}}{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}}\;\frac{(1-\eta^2)}{\beta^3}} \qquad (10)$$

здесь $\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-} = 4a^2\pi/3s$ – асимптотическое сечение процесса $e^+e^-\to\mu^+\mu^-$. Знак равенства в (10) достигается, когда суммирование в D является когерентным, что имеет место, например, в модели векторной доминантности (распространенной и на амплитуду $\langle\pi^+\pi^-\,|\,T|n\rangle$).

[1] Отметим, что при наличии экспериментальных значений $|F_\pi(s)|$ для больших энергий ($\sqrt{s} > 1$ *Гэв*), при анализе их следует пользоваться формулами с учетом неупругих процессов типа (7), где надо параметризовать $\operatorname{Im} C(s)/(1+\eta(s))$.

Однако прямое использование этой модели с постоянными константами быстро приводит к нарушению унитарности предела для сечений. Если же использовать, что $\sigma'_{e^+e^- \to h} < \mathrm{const}/s$ при $s \to \infty$ [9], то (10) дает, по-видимому, слишком слабое ограничение на D в асимптотической области.

В области относительно небольших энергий можно, вероятно, считать, что в (10) приближенно стоит знак равенства. Учитывая, что в области $\sqrt{s} < 1{,}4$ *Гэв* величины δ_{11} и η известны из эксперимента [10] в качестве иллюстрации представляет интерес прямое вычисление $F_\pi(s)$ по формуле (3) (предполагая, что D вещественно[1]). К сожалению, значения сечения $\sigma'_{e^+e^- \to h}$ известно, пока с весьма малой точностью. Взяв[2] $\sigma'_{e^+e^- \to h} = 12$ *nб* ($\sqrt{s} = 1$ *Гэв*) [12] и $\sigma'_{e^+e^- \to h} = 30$ *nб* ($\sqrt{s} = 1{,}2 \div 1{,}4$ *Гэв*) [5] (обрезаны события с мягкими пионами), η и δ_{11} из [10], находим $F_\pi(s)$. Результаты (обозначенные крестиками) даны на рисунке, на котором одновременно приведены экспериментальные данные [3] из работ [1, 2], кривая представляет "хвост" ρ-резонанса. В области энергий $\sqrt{s} > 1{,}4$ *Гэв* нет данных для η и δ_{11}.



---

[1] Мы хотим здесь отметить, что для теоретического анализа очень важно знать фазу формфактора $F_\pi(s)$.

[2] Нам необходимы сечения для $I = 1$. Следует однако иметь в виду, что в модели векторной доминантности, см., например, [11], а также в случае точной $SU(3)$-симметрии множественное рождение идет в основном в состоянии $I = 1$.

[3] Любопытно, что мы нигде не нормировали на кривую Брейта – Вигнера. Заметим, что полученные результаты являются при вещественном D строгой верхней границей значений формфактора $|F_\pi(s)|$.

Из формул (3), (10) вытекает также строгое неравенство для $|F_\pi(s)|$ (для комплексных D), при получении которого используется только условие унитарности:

$$|F_\pi(s)|^2 \leqslant \frac{4}{\beta^3}\frac{\sigma'_{e^+e^-\to h}}{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}}\left(\frac{1+\eta}{1-\eta}\right). \tag{11}$$

Оно может быть записано также в форме

$$\sigma_{e^+e^-\to\pi^+\pi^-} \leqslant \sigma'_{e^+e^-\to h}\,\frac{1+\eta}{1-\eta}\,. \tag{12}$$

Определим фазу формфактора $F_\pi^+(s) = |F_\pi(s)|\,e^{i\delta_F}$, тогда из соотношения унитарности (1) следует

$$|F_\pi| = \frac{2|D|}{|1-\eta e^{2i(\delta_{11}-\delta_F)}|}\,. \tag{13}$$

Подставляя сюда верхнюю границу $|D|$ (10) получаем следующее неравенство

$$\sin^2(\delta_{11}-\delta_F) \leqslant \frac{1-\eta^2}{4\eta}\left[\frac{4\sigma'_{e^+e^-\to h}}{\sigma_{e^+e^-\to\mu^+\mu^-}\,\beta^3|F_\pi(s)|^2} - \frac{1-\eta}{1+\eta}\right]. \tag{14}$$

Интересно, что при $\sqrt{s} = 1{,}0$ *Гэв* ($\eta = 0{,}95$, $|F_\pi(s)|^2 = 3$) имеем, $\sin^2(\delta_{11}-\delta_F) \leqslant 0{,}005$, т. е. $|\delta_{11}-\delta_F| \leqslant 4°$.

Институт ядерной физики
Сибирское отделение
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 января 1972 г.

Литература

[1] V.E.Balakin et al. International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies, Cornell, 1971; Препринт ИЯФ 56-71

[2] C.Bernardini. International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies. Cornell, 1971.

[3] В.Л.Ауслендер, Г.И.Будкер, Е.В.Пахтусова и др. ЯФ, 9, 114, 1969.

[4] I.Augustin et al. Phys. Lett., 28B, 508, 1969.

[5] V.A.Sidorov. International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies. Cornell, 1971.

[6] M.Grilli. Международная школа по физике элементарных частиц. Ереван, 1971.

[7] Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.

[8] R.Omnes. Nuovo Cim., 8, 316, 1958.

[9] V.N.Gribov, B.L.Ioffe, I.Ya. Pomeranchuk. Phys. Lett., 24B, 554, 1967.

[10] B.Oh et al. Phys. Rev., D1, 2494, 1970.

[11] I.Layssac, F.M.Renard. Lett. Nuovo Cim. 1, 197, 1971.

[12] I.Lefrancois. International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energies. Cornell, 1971.