Письма в ЖЭТФ, том 15, вып. 6, стр. 346 – 349   20 марта 1972 г.

ВОЗБУЖДЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ПЛАЗМЕННОЙ ВОЛНЫ МОДУЛИРОВАННЫМ ПУЧКОМ С БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ЭНЕРГИИ

В. Б. Красовицкий

Как показано в работах [1, 2], возбуждение одномерных плазменных колебаний моноэнергетическим релятивистским пучком электронов характеризуется тем, что значительная доля энергии пучка преобразуется в энергию поля колебаний. При этом в плазме возникают большие напряженности полей, так что может оказаться существенным эффект изменения волноводных свойств плазмы [3] из-за зависимости плотности электронов от амплитуды электрического поля [4]. Проведенное ниже исследование взаимодействия релятивистского пучка с нелинейной плазмой указывает на возможность синхронизма пучка с волной на нелинейной стадии развития неустойчивости, если параметры пучка и плазмы подобраны таким образом, что скорость пучка и фазовая скорость волны убывают со временем по одинаковому закону. Энергия, передаваемая пучком полю в этом случае, значительно превосходит значение, найденное в работах [1, 2].

Пусть последовательность электронных сгустков, расположенных на расстоянии ℓ друг от друга, движется через плазму с начальной скоростью v_0. Считая, что размеры каждого сгустка малы по сравнению с расстоянием между ними: $\delta\ell << \ell$, и заменяя их заряженными слоями с поверхностной плотностью заряда σ, получим следующую систему уравнений, описывающую взаимодействие пучка с плазмой:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_p^2 E\right) = -4\pi\sigma e\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{s=-\infty}^{\infty}\delta[x - s\ell - x_s(t)], \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\gamma_s\dot{x}_s = -\frac{e}{m}\mathrm{Re}\,E[t, x_s(t)], \quad \gamma_s = \left(1 - \frac{\dot{x}_s^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Здесь E – самосогласованное электрическое поле, $x_s(t)$ – координата каждого слоя, а плазменная частота и амплитуда поля связаны следующим соотношением [4]:

$$\omega_p^2(E) = \omega_0^2\exp\left(-\frac{|E|^2}{E_0^2}\right), \quad E_0^2 = \frac{8m\omega_0^2 T}{e^2}, \tag{2}$$

где T-температура плазмы в энергетических единицах, $\omega_0 \equiv \omega_p(0)$.

Учитывая пространственную периодичность системы, будем искать решение (1) в виде:

$$E(t, x) = E(t)\exp[i\theta(t) + i(\omega_0 t - kx)], \tag{3}$$

где $k = \dfrac{2\pi}{\ell} = \dfrac{\omega_o}{v_o}$, $E(t)$ и $\theta(t)$ – медленно изменяющиеся функции : $\dot{E} << \omega_o E$ и $\dot{\theta} << \omega_o \theta$.

Подставляя (3) в (1) и усредняя первое уравнение по пространственному периоду, получаем:

$$\frac{d}{dt}\gamma\dot{x} = -\frac{e}{m}E\cos(\psi-\theta),$$

$$\dot{E} = 2\pi e n_1 v_o \cos(\psi-\theta), \tag{4}$$

$$E\dot{\theta} = -\frac{\omega_o}{2}\left[1-\exp\left(-\frac{E^2}{E_o^2}\right)\right]E + 2\pi e n_1 v_o \sin(\psi-\theta),$$

где $\psi = -\omega_o\left(t-\dfrac{x}{v_o}\right)$ и $n_1 = \sigma/\ell$.

Из первого и второго уравнений системы (4) следует закон сохранения импульса в системе плазма –пучок:

$$m\gamma\dot{x} + \frac{E^2}{4\pi n_1 v_o} = m\gamma_o v_o, \tag{5}$$

что позволяет ввести переменную $\eta = \theta - \psi$ и понизить порядок системы уравнений (4):

$$\dot{w} = \frac{\omega_1}{2}\cos\eta,$$

$$\dot{\eta} = -\frac{\omega_1}{2w}\sin\eta - \frac{\omega_o}{2}\left[1-\exp\left(-\frac{w^2}{w_o^2}\right)\right] +$$

$$+\ \omega_o\left[1-\frac{1-w^2}{(1-2\beta_o^2 w^2+\beta_o^2 w^4)^{1/2}}\right]. \tag{6}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$w^2 = \frac{E^2}{4\pi n_1 m v_o^2\gamma_o},\quad w_o^2 = \frac{E_o^2}{4\pi n_1 m v_o^2\gamma_o},\quad \omega_1^2 = \frac{4\pi e^2 n_1}{m},\quad \beta_o = \frac{v_o}{c}.$$

Интегрируя уравнения (6) с начальными условиями $\eta(0) = w(0) = 0$, находим зависимость фазы пучка от амплитуды поля w:

$$\left(4\frac{n_1}{n_o\gamma_o}\right)^{1/2} w\sin\eta = w_o^2\left[1-\exp\left(-\frac{w^2}{w_o^2}\right)\right] + w^2 + \frac{2}{\beta_o^2}\left(1-\beta_o^2 w^2+\beta_o^2 w^4\right)^{1/2} - \frac{2}{\beta_o^2}. \tag{7}$$

Выражая $\cos\eta$ через w из соотношения (7) и подставляя его в первое уравнение (6), приходим к нелинейному уравнению первого порядка для амплитуды поля, согласно которому функция $w(t)$ периодически изменяется со временем. Для отыскания аналитических решений упростим (7), разлагая правую часть в ряд по степеням w и удерживая старшие члены разложения:

$$\left(4\frac{n_1}{n_o\gamma_o}\right)^{1/2}\sin\eta=\left(\frac{1}{\gamma_o^2}-\frac{1}{2w_o^2}\right)w^3+\left(\frac{1}{6w_o^4}+\frac{\beta_o^2}{\gamma_o^2}\right)w^5. \qquad (8)$$

Рассмотрим наиболее интересные предельные случаи. Для пучка, плотность энергии которого мала по сравнению с плотностью тепловой энергии плазмы ($w_o^2 >> \gamma_o^2$), имеем [2]:

$$\sin\eta=\frac{w^3}{w_1^3},\quad w_1=\left(4\frac{n_1}{n_o}\gamma_o^3\right)^{1/6}. \qquad (9)$$

Подставляя (9) в первое уравнение (6), приходим к формулам:

$$\frac{\dot w}{w_1}=\frac{1}{\tau_1}\left[1-\left(\frac{w}{w_1}\right)^6\right]^{1/2},\quad \tau_1\quad 2^{4/3}\left(\frac{n_o}{n_1}\gamma_o^3\right)^{1\ 3}\omega_o^{-1}, \qquad (10)$$

согласно которым максимальная амплитуда поля достигает значения w_1 за время порядка τ_1.

Если выполнено условие нелинейного резонанса $\gamma_o^2 = 2w_o^2$, то уравнение для функции $w(t)$ принимает вид:

$$\frac{\dot w}{w_2}=\frac{1}{\tau_2}\left[1-\left(\frac{w}{w_2}\right)^{10}\right]^{1/2},\quad w_2=\left(4\frac{n_1}{n_o}\gamma_o^3\right)^{1/10},\quad \tau_2=2^{6/5}\gamma_o^{4/5}\left(\frac{n_o}{n_1}\right)^{2/5}\omega_o^{-1} \qquad (11)$$

(предполагается, что $\gamma_o >> 1$ и $\beta_o = 1$).

Аналогичным образом находим максимальную амплитуду поля w_3 в случае, когда плотность энергии пучка значительно превосходит плотность энергии плазмы:

$$w_3=(2w_o)^{2/3}(n_1/n_o\gamma_o)^{1/6}. \qquad (12)$$

В заключение представим полученные выше результаты в размерных переменных:

$$\frac{E^2_{max}}{4\pi}=\begin{cases}\left(4\dfrac{n_1}{n_o}\gamma_o^3\right)^{1/3}n_1mv_o^2\gamma_o, & n_1mv_o^2\gamma_o^3 << n_oT\\[2ex] \left(4\dfrac{n_1}{n_o}\gamma_o^3\right)^{1/5}n_1mc^2\gamma_o, & n_1mc^2\gamma_o^3 = 16n_oT\\[2ex] (2w_o)^{4/3}\left(\dfrac{n_1}{n_o\gamma_o}\right)^{1/3}n_1mv_o^2\gamma_o, & n_1mc^2\gamma_o^3 >> n_oT.\end{cases} \qquad (13)$$

Как следует из (14), плотность энергии поля увеличивается, когда плотность энергии пучка приближается к резонансному значению. После перехода через резонанс энергия, передаваемая пучком полю, убывает.

Всесоюзный
научно-исследовательский
проектно-конструкторский
и технологический институт
низковольтного аппаратостроения

Поступила в редакцию
27 января 1972 г.

Литература

[1] Я.Б.Файнберг, В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко. ЖЭТФ, 57, 966, 1969.

[2] В.Б.Красовицкий. Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, 13, 1902, 1970; ЖЭТФ 62, вып. 3, 1972.

[3] В.Б.Красовицкий, В.И.Курилко. ЖЭТФ, 51, 445, 1966.

[4] А.В.Гапонов, М.А.Миллер. ЖЭТФ, 34, 242, 1958.