Письма в ЖЭТФ, том 15, вып.8, стр. 487 – 491　　　*20 апреля 1972 г.*

ОБОБЩЕНИЕ МОДЕЛИ НЕВЬЮ – ШВАРЦА НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ρ-ТРАЕКТОРИИ

В.А.Кудрявцев

Построение амплитуды с N внешними π-мезонами, включающей физические траектории,– одна из важных задач дуального подхода. Делавшиеся ранее попытки [1, 2] решения этой проблемы, хотя и включали π-мезонную и ρ-мезонную траектории без состояний с мнимой массой (тахионов), обладали существенными недостатками. Главный из них – отсутствие факторизации на уровне дочерних траекторий.

Невью и Шварцем [3] была предложена дуальная амплитуда для π-мезонной N-хвостки с $\alpha_\rho(0) = 1$ и $\alpha_\pi(0) = 1/2$ без тахиона на ρ-траектории и с калибровочными условиями, исключающими духи из спектра состояний.

Амплитуда Невью – Шварца факторизуется на всех состояниях спектра. Хальперн и Торн [4] модифицировали эту модель для случая произвольного $\alpha_\pi(0)$.

Целью данной работы является обобщение амплитуды Невью – Шварца на произвольное $\alpha_\rho(0)$. Тахион на ρ-траектории в построенной модели отсутствует, вклад всех состояний факторизуется независимо от числа внешних π-мезонов. Однако, условия "сверхкалибровки" здесь уже не приводят к исключению духов из спектра. Для построения модели введем в дополнение к обычным 4-м компонентам импульса внешнего мезона k_i новые компоненты $\kappa_{i\mu}$ $\underset{\sim}{\mu} = 5, 6, 7\ldots$, так, чтобы квадрат обобщенного многомерного вектора $\tilde{k}_i \equiv (k_i, \kappa_i)$ остался равным -1, а сумма всех векторов $\tilde{k}_i$ оставалась равной 0.

$$\frac{\tilde{k}_i^2}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{\kappa_i^2}{2} = -\frac{1+\mu^2}{2} \qquad \alpha_\pi(0) + \frac{\mu^2}{2} = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \tilde{k}_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{N} \kappa_i = 0. \tag{2}$$

Если вместе с новыми компонентами κ_i ввести и соответствующие компоненты операторов $b_{m\mu}$ и $a_{n\mu}$, то можно видеть, что новые операторы Невью – Шварца, зависящие от $\tilde{k}_i$, $g_m(\tilde{k}_i)$ будут удовлетворять прежним коммутационным соотношениям (3), (4)

$$\{ g_m(\tilde{q}),\ g_n(\tilde{q}) \} = 2L_{m+n}(\tilde{q}), \tag{3}$$

$$[g_m(\tilde{q}),\ L_n(\tilde{q})] = \left(\frac{1}{2}\,n - m\right) g_{m+n}(\tilde{q}). \tag{4}$$

Написав по рецепту Невью – Шварца операторные вершины:

$$V(\tilde{k}_i) = [g_m, V_0(\tilde{k}_i)] = (\tilde{k}_i H) V_0(\tilde{k}_i) \tag{5}$$

где

$$V_0(\tilde{k}_i) = \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{k}_i a_n^+)}{n} \exp \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tilde{k}_i a_n)}{n}, \quad H_\mu = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{m\mu},$$

$$m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \ldots \quad b_{-m} \equiv b_m^+, \quad [a_{n\mu}, a_{m\nu}^+] = n\delta_{mn} g_{\mu\nu},$$

$$\{ b_{\ell\mu},\ b_{m\nu}^+ \} = \delta_{\ell m}\, g_{\mu\nu}$$

построим новое выражение для амплитуды с N внешними π-мезонами заменив импульсы k_i на $\tilde{k}_i$ в исходной амплитуде Невью – Шварца. Значения масс состояний на ρ-мезонной и π-мезонной траекториях будут определяться из соотношений (6) и (8), а пересечения траекторий из формул (7) и (9).

$$1 + \frac{\tilde{q}^2}{2} = 1 + \frac{q^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} = n \qquad \kappa = \sum_{j=1}^{i} \kappa_j, \tag{6}$$

$$1 + \frac{\kappa^2}{2} = \alpha_\rho(0) \equiv \alpha_0 \tag{7}$$

i – четное число, $n = 0, 1, 2\ldots$

$$\frac{1}{2} + \frac{\tilde{q}^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{\kappa^2}{2} = n, \qquad \kappa = \sum_{\ell=1}^{j} \kappa_\ell \tag{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\kappa^2}{2} = \alpha_\pi(0) = -\frac{\mu^2}{2} \tag{9}$$

j – нечетное число, $n = 0, 1, 2 \ldots$

Чтобы удовлетворить соотношениям (7) и (9) для произвольных a_0 и $a_\pi^{(0)}$, необходимо и достаточно сделать скалярные произведения векторов κ_ℓ следующими:

$$\kappa_\ell \kappa_{\ell+1} = a_0 + \mu^2 , \tag{10}$$

$$\kappa_\ell \kappa_{\ell+2} = \kappa_\ell \kappa_{\ell+4} = \kappa_\ell \kappa_{\ell+6} = \dots = \kappa_\ell \kappa_{\ell+2k} = -\lambda , \tag{11}$$

$$\kappa_\ell \kappa_{\ell+3} = \kappa_\ell \kappa_{\ell+5} = \dots = \kappa_\ell \kappa_{\ell+2k+1} = \Lambda , \tag{12}$$

$$\lambda = 2a_0 + \mu^2 - 1.$$

Условие $\lambda = 0$ т. е.

$$2a_0 + \mu^2 - 1 = 0 \tag{13}$$

есть условие Адлера – Лавлейса. В этом случае построение векторов κ_i существенно упрощается и можно определить отличными от 0 только две их компоненты $\kappa_{i\mu}$ $i = 1, 2 \dots N-1$: именно κ_{ii} и κ_{ii+1}.

Вектор κ_N может быть получен согласно "закону сохранения" (2) как:

$$\kappa_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i .$$

Нетрудно видеть, что в этом случае соблюдается факторизация, т. е. как в обычной дуальной модели, число состояний с данными спином и массой вполне определено. Именно, поскольку (3), (4) и (5) выполнены, те же самые, что и в [3] алгебраические выкладки позволят записать амплитуду N-хвостки в форме (14)

$$A = < 0 | V(\tilde{k}_2) \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} V(\tilde{k}_3) \dots \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} V(\tilde{k}_{N-1}) | 0 > . \tag{14}$$

Форма (14) автоматически исключает тахион на ρ-траектории, так как в ней состоянием с низшей массой является π-мезонное состояние с массой μ.

Рассмотрим факторизацию амплитуды A в канале $q^2 = (k_1 + k_2 + \dots + k_i)^2$. Для этого выражение (14) представим как обычно в виде суммы по состояниям $| \lambda >$:

$$A = \sum_n \sum_\lambda < 0 | V_2 \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} V_3 \dots V_i | \lambda > \frac{1}{n - \alpha_{q^2}} < \lambda | V_{i+1} \frac{1}{L_0 - \frac{1}{2}} \dots V_{N-1} | 0 >$$

$| \lambda >$ – это состояние в пространстве чисел заполнения

$$| \lambda > \sim (a^+_{1\mu_1})^{r_1} (a^+_{1\mu_2})^{r_2} \dots (a^+_{2\mu_1})^{s_1} (a^+_{2\mu_2})^{s_2} \dots (b^+_{\mu_1/2})^{n_1} \dots | 0 > .$$

В силу (13) скалярные произведения $\kappa_\ell \kappa_m$ $\ell = 2, 3 \ldots i$ $m = i+1, \ldots N-1$ обращаются в 0 за исключением $\kappa_i \kappa_{i+1}$. Поэтому наряду с обычными четырьмя компонентами $a^+_{n\mu}$ и $b^+_{m\mu}$ войдет в $|\lambda>$ еще только одна $i+1$-я компонента операторов $a^+_{n\mu}$ и $b^+_{m\mu}$. Число состояний с данными массой и спином может быть найдено с учетом этих операторов. Конкретный номер дополнительной компоненты никакой роли не играет (условия (10) – (12) ковариантны), после факторизации номера компонент векторов правой $i+1$-хвостки и левой $N-i+1$-хвостки могут быть выбраны одним и тем же образом.

Таким образом спектр определяется 4-я компонентами операторов a_n и b_m и дополнительной компонентой этих операторов $a_{n,i+1}$ и $b_{m,i+1}$.

В данной модели отсутствие духов на первой дочерней к ρ-мезонной и к π-мезонной траекториям может быть продемонстрировано стандартным образом. Как всегда, это свойство есть прямое следствие SU_{11} инвариантности амплитуды. Условия сверхкалибровки, связанные с операторами g_m $m \geqslant 3/2$ и L_n $n \geqslant 2$, не приводят здесь к сужению спектра состояний и, как следствие, выпадению всех духов. Эти условия каждый раз выражают состояния $|\lambda>_{i+1}$ описанные выше, через новые состояния, включающие не одну, а все дополнительные компоненты операторов $a^+_{n\mu}$ и $b^+_{m\mu}$. Поэтому связей между самими состояниями $|\lambda>_{i+1}$ не появляется.

Повторяя рассуждения Брауэра – Торна [5] тогда можем показать, что асимптотически на достаточно глубоких дочерних траекториях будут духи. Отметим в заключение, что отказ от условия Адлера – Лавлейса в этой модели привел бы к расширению спектра состояний за счет еще одной компоненты, появляющейся при факторизации. Любой вектор κ_ℓ тогда мог бы быть записан в виде суммы

$$\kappa_\ell = \kappa'_\ell + (-1)^\ell \xi , \tag{16}$$

где κ'_ℓ имеет как и ранее отличные от 0 только 2 компоненты $\kappa'_{\ell\ell}$ и $\kappa'_{\ell\ell+1}$, и перпендикулярен к вектору ξ.

$$\kappa'_\ell \xi = 0, \quad \kappa'_\ell \kappa'_{\ell+1} = 1 - a_0, \quad \kappa'_i \kappa'_k = 0, \quad k > i \; k \neq i+1, \quad \xi^2 = -\lambda,$$

$$\kappa'^2_\ell = 2(a_0 - 1) . \tag{17}$$

Тогда (при выполнении соотношений (17)) условия (10) – (12) удовлетворяются, и в состояния $|\lambda>$, факторизующие амплитуду, будут давать вклад операторы $a^+_{n,i+1}$ $a^+_{n\xi}$ и $b^+_{m,i+1}$ $b^+_{m\xi}$.

В заключение автор благодарит Е.М. Левина за полезные обсуждения и участников теоретического семинара ЛИЯФ за интерес к работе.

Ленинградский
институт ядерной физики
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 февраля 1972 г.

Литература

[1] D.I.Olive, W.I.Zakrzewski. Nucl. Phys., B21, 303, 1970.

[2] I.D.Dorren, V.Rittenberg, H.R.Rubinstein. Nuovo cim., 3A, 385, 1971.

[3] A.Neveu, I.H.Schwarz, C.B.Thorn. Phys. Lett., 35B, 529, 1971.

[4] M.B.Halpern, C.B.Thorn. Phys. Lett., 35B, 441, 1971.

[5] R.C.Brower, C.B Thorn . Nucl. Phys., B31, 163, 1971.