Письма в ЖЭТФ, том 15, вып.9, стр. 567 – 571. 5 мая 1972 г.

К ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСОВЫХ СИЛ МЕЖДУ МАКРОСКОПИЧЕСКИМИ ТЕЛАМИ

Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург

Силы Ван-дер-Ваальса между макроскопическими телами (например, между двумя пластинами-областями *1* и *2*) можно вычислить электродинамическим методом с привлечением флуктуационно-диссипационной теоремы. Соответствующая теория была сначала развита (см. [1, 2] § 92) в применении к двум полупространствам с параллельными границами, разделенными пустой щелью (область *3*). Обобщение расчетов на случай щели, заполненной средой было, однако, осуществлено лишь с использованием сложного аппарата температурных гриновских функций. Вместе с тем найденные в [3] результаты для заполненной произвольной средой щели, были недавно получены [4, 5] с помощью несравненно более простого приема. Именно, свободная энергия F или внутренняя энергия U системы (среды *1*, *2*, и *3*) представляется в виде суммы вкладов гармонических осцилляторов с частотами поверхностных колебаний (волн) ω_a, отвечающими рассматриваемой задаче. Например, полагается

$$U(\ell) = \sum_a \phi(\omega_a, T), \quad \phi(\omega_a, T) = \frac{\hbar\omega_a}{2} \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega_a}{2kT}, \qquad (1)$$

где ℓ ширина щели *3*, от которой зависят частоты ω_a, а индекс a объединяет как дискретные переменные, так и волновой вектор $\mathbf{k}$ в плоскости щели. Зная частоты $\omega_a(\ell)$, находим $U(\ell)$ или $F(\ell)$, а затем дифференцированием по ℓ получаем силу $f(\ell)$, совпадающую с полученной в [1 – 3.] Метод легко, в принципе, обобщается на более сложные конфигурации; в частном случае идеально проводящих пластин в вакууме этот метод сводится к применявшемуся уже давно приему [7] (см. также [8, 9]). Как в этом предельном случае, так и в более общем, когда все среды *1*, *2* и *3* являются непоглощающими, смысл выражения (1) очевиден, а формально оно получается в результате стандартного квантования поля в среде (см., например, [10]). Теория ван-дер-ваальсовых сил между телами развита, однако, для поглощающих сред, причем учет поглощения, вообще говоря, совершенно необходим [1 – 3]. При наличии же поглощения собственные частоты ω_a комплексны и выражение (1) явно не имеет смысла внутренней энергии. Последнее ясно как формально, так и из сравнения с RCL-контуром, для которого при наличии сопротивления $R \neq 0$ средняя (внутренняя) энергия отнюдь не равна энергии контура при $R = 0$ (см. [11]). Поэтому результаты расчетов [4 – 6] совпадают с полученными в [1 – 3] в известной мере лишь формально, поскольку диэлектрические проницаемости ϵ_1, ϵ_2 и ϵ_3 сред *1,2* и *3* входят в [1 – 3] общим образом и их, в частности, можно считать вещественными; кроме того, в окончательных выражениях в [1 – 6] все проницаемости $\epsilon_j(\omega)$ ($j = 1, 2, 3$) берутся на мнимой оси частот $\omega = i\xi$, где проницаемость вещественна. Вместе с тем, подход [4 – 6] (см. также [12 – 14]) несомненно эффективен, а его успех естественно считать связанным с возможностью последовательного обобщения на случай поглощающих сред. Так дело и обстоит в действительности.

По сути дела проблема сводится к нахождению внутренней энергии электромагнитного поля $U(\ell)$ в поглощающей среде. В общем случае такой термодинамической величины вообще не существует в связи с невозможностью в законе сохранения энергии однозначно выделить диссипационный член (см., например, [2] § 61 и [15] § 3). Однако в состоянии теплового равновесия, которое мы здесь имеем в виду [1 – 6], никакой диссипации нет (речь идет о статистических средних величинах, обозначаемых ниже знаком $< \quad >$), и внутренняя энергия имеет определенное значение также для поглощающей среды. Это особенно очевидно на примере RCL-контура, описываемого уравнением:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = K, \qquad (2)$$

где $I = \dot{q}$ – сила тока и K – флуктуационная (случайная) ЭДС.

В тепловом равновесии, очевидно, $R < I^2 > = < KI >$, а внутренняя энергия (подробнее см. [11])

$$U = < \frac{q^2}{2C} > + < \frac{LI^2}{2} > = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{RC\phi(\omega, T)d\omega}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2} +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{RLC^2\phi(\omega, T)\omega^2 d\omega}{(LC\omega^2 - 1)^2 + R^2C^2\omega^2} \quad ; \qquad (3)$$

Электромагнитное поле в произвольной системе можно считать находящимся в некотором окружающем систему вспомогательном резонаторе и разложенным по собственным колебаниям этого резонатора; частоты таких колебаний суть $\omega_\alpha(\omega)$, где вещественная частота ω входит как параметр (см. [16] §§ 100 – 102 и ниже). Применение такой методики к RCL-контуру показывает, что в этом случае частота

$$\omega_\alpha(\omega) \equiv \omega_1(\omega) = \sqrt{\frac{1}{LC} - i\frac{R}{L}\omega}\,, \tag{4}$$

где ω_1 есть решение свободного уравнения (2), в котором положено $R(\omega_1) = (\omega/\omega_1) R$, что и отвечает введению соответствующего вспомогательного контура (подробнее см. [16]). С помощью частоты $\omega_1(\omega)$, выражение (3) переписывается в виде

$$\begin{cases} W_E = \left\langle \dfrac{q^2}{2C} \right\rangle = -\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega,T)\omega\, d\omega}{\omega_1^2(\omega)-\omega^2} + \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega,T)\dfrac{d\omega_1^2(\omega)}{d\omega}}{\omega_1^2(\omega)-\omega^2}\, d\omega \\ W_H = \left\langle \dfrac{L I^2}{2} \right\rangle = -\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(\omega,T)\omega\, d\omega}{\omega_1^2(\omega)-\omega^2}, \quad U = W_E + W_H \end{cases} \tag{5}$$

Для системы весьма общего вида (учитываются поглощение, частотная и пространственная дисперсия, анизотропия, плавные неоднородности и наличие границ разрыва) собственные частоты $\omega_\alpha(\omega)$ фигурируют в уравнениях поля для собственных функций (полей) $\mathbf{E}_{\omega_\alpha}$ и $\mathbf{H}_{\omega_\alpha}$ во вспомогательном резонаторе, окружающем систему:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, r) = -\dfrac{i\omega_\alpha(\omega)}{c} \displaystyle\int \hat{\epsilon}(\omega, r, r')\mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, r')\, dr', \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, r) = \dfrac{i\omega_\alpha(\omega)}{c} \mathbf{H}_{\omega_\alpha(\omega)}(\omega, r) \end{cases} \tag{6}$$

где $\hat{\epsilon}$ – линейный оператор, вырождающийся в скаляр лишь для изотропной среды без пространственной дисперсии. Внутренняя энергия рассматриваемой системы в состоянии теплового равновесия, как это ясно из (5), равна

$$U = -\frac{i}{\pi}\sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega,T)\omega\, d\omega}{\omega_\alpha^2(\omega)-\omega^2} + \frac{i}{2\pi}\sum_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(\omega,T)}{\omega_\alpha^2(\omega)-\omega^2} \frac{d\omega_\alpha^2(\omega)}{d\omega}\, d\omega. \tag{7}$$

Полагая $\omega_\alpha(\omega) = \operatorname{Re}\omega_\alpha(\omega) - i\xi$, в результате предельного перехода $\xi \to +0$ приходим для прозрачной среды к выражению (1). Этот вывод очевиден также из известного результата для RCL-контура (речь идет о выражении (3) при $R \to 0$; см [11]).

От внутренней энергии U легко перейти к свободной энергии

$$F = -kT\int\rho(\beta)\,d\beta\sum_{a}\left\{\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\frac{d\omega^2_{a\beta}(\omega)}{d\omega}\right)}{\omega^2_{a\beta}(\omega)-\omega^2}\ln\left[2\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2kT}\right]d\omega + \int_{-\infty}^{0}\frac{\left(\omega-\frac{1}{2}\frac{d\omega^2_{a\beta}(\omega)}{d\omega}\right)}{\omega^2_{a\beta}(\omega)-\omega^2}d\omega\right\}. \tag{8}$$

Здесь β – та часть индексов a, которые являются непрерывными с плотностью состояний $\rho(\beta)$. Вытекающее из (6) дисперсионное уравнение, определяющее частоты $\omega_{a\beta}(\omega)$, запишем в виде

$$D_{\beta}(\omega', \omega) = 0. \tag{9}$$

Здесь индекс β рассматривается как фиксированный параметр (аргумент функции D) и значения $\omega' = \omega_{a\beta}(\omega)$ суть корни уравнения (9).

Для реальной (а не вспомогательной) задачи, как ясно из (6), $\omega_{a\beta} = \omega$ и дисперсионное уравнение $D_{\beta}(\omega, \omega) = D_{\beta}(\omega) = 0$. Путем выкладок, родственным имеющимся в [5], с использованием известной теоремы о свойствах логарифмического вычета, выражение (8) преобразуется к виду

$$F = kT\int\left\{\sum_{n=0}^{\infty}{}' \ln D_{\beta}(\omega_n)\right\}\rho(\beta)\,d\beta, \quad \omega_n = i\,\frac{2\pi nkT}{\hbar}, \tag{10}$$

где штрих у суммы означает, что член с $n = 0$ берется с весом 1/2; как можно показать (см. также [5, 14]), выражение (10) совпадает с полученным Е.Лифшицем при произвольных комплексных $\epsilon_1(\omega)$, $\epsilon_2(\omega)$ и $\epsilon_3(\omega)$ [1 – 3].

Таким образом, как нам представляется, полностью обосновано применение метода разложения по собственным частотам[1] при вычислении ван-дер-ваальсовых сил в средах весьма общего класса (заметим, что вопрос о макроскопических ван-дер-ваальсовых силах привлекает к себе большое внимание; см. [1 – 9, 12 – 14, 17 – 24]). Получение выражения для энергии электромагнитного поля в равновесной поглощающей среде имеет и более широкое значение.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 марта 1972 г.

[1] Относительная простота и эффективность этого метода связана с тем, что при его использовании нужно знать лишь частоты $\omega_{a\beta}(\omega)$ или даже только исходное дисперсионное выражение $D_{\beta}(\omega)$

Литература

[1] Е.М.Лифшиц. ЖЭТФ, 29, 94, 1955.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., ГТТИ, 1957,

[3] И.Е.Дзялошинский, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский. УФН, 73, 381, 1961 ; А.А.Абрикосов, Л.П.Горьков, И.Е.Дзялошинский. Методы квантовой теории поля в статистической физике. М., Физматгиз, 1962.

[4] N.G.van Kampen , B.R.A.Nijboer, K.Schram. Phys. Lett., 26A, 307, 1968.

[5] B.W.Ninham, V.A.Parsegian, G.H.Weiss. J. Statistical Phys., 2, 323, 1970.

[6] E.Gerlach. Phys. Rev.,B4, 393, 1971.

[7] H.B.G.Casimir . Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap.,51, 793, 1948.

[8] T.H.Boyer. Ann. of Phys., 56, 474, 1970.

[9] W.Lukosz. Physica, 56, 109, 1971.

[10] В.Л.Гинзбург. ЖЭТФ, 10, 589, 1940; J. of Phys. USSR, 2, 441, 1940.

[11] В.Л.Гинзбург. УФН, 46, 348, 1952.

[12] B.W.Ninham, V.A.Parsegian. J.Chem. Phys., 52, 4578, 1970; 53, 3398, 1970.

[13] D.B.Chang, R.L. Cooper , J.F.Drummond. A.C.Young. Phys. Lett., 37A, 311, 1971.

[14] B.Davies. Phys. Lett., 37A, 391, 1971.

[15] В.М.Агранович, В.Л.Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов. М., Изд. Наука, 1965.

[16] Л.А.Вайнштейн. Электромагнитные волны М., Изд. "Советское радио", 1957.

[17] A.D.McLachlan. Proc. Roy. Soc., 274, 80, 1963.

[18] L.S.Brown, G.J.Maclay. Phys. Rev., 184, 1272, 1969.

[19] P.G.de Gennes. C.R.Acad. Sc. Paris, 271, B469, 1970.

[20] М.Л.Левин, С.М.Рытов. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М., Изд. Наука, 1967.

[21] M.J.Renne. Physica, 53, 193, 1971; 56, 125, 1971.

[22] R.H.Winterton. Contemp. Phys., 11, 559, 1970; УФН, 105, 307, 1971.

[23] Е.И.Кац. ЖЭТФ, 60, 1172, 1971.

[24] D.Langbein. J. Phys. Chem. Solids., 32, 1657, 1971.