О ГРУППОВОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОМПЛЕКСНОГО СПИНА

В.И. Рогинский

Теория полюсов Редже вызвала к жизни представление о частицах с комплексным спином, которые рассматриваются либо как виртуальные, либо как нестабильные. Понятие комплексного спина может оказаться также интересным и с совершенно другой точки зрения: возможно, что "частицы" с комплексным спином, обладая свойствами, исключающими их непосредственную наблюдаемость, могли бы послужить "материалом" для построения реальных частиц (т.е. сыграть роль "кварков")[1]. Чтобы квантовомеханическое рассмотрение таких "частиц" стало возможным, необходима групповая интерпретация комплексного спина.

За последние годы появился ряд работ, посвященных поискам такой интерпретации. В этих работах рассматривалось либо локальное представление (П) группы $SU(2)$ (см., например, [1 – 3]), либо П алгебры Ли этой группы (см., например, [4]), либо неприводимое представление (НП) группы $SU(1,1)$ (см., например, [5, 6]). Однако ни одна из этих конструкций не дает закона преобразования состояния "частицы" с комплексным спином при произвольных вращениях. Выходом могло бы, возможно, оказаться рассмотрение семейства локальных П, согласованных между собой и исчерпывающих в совокупности всю группу $SU(2)$. В настоящей работе предлагается, однако, другая схема.

В этой схеме, как и в предлагавшихся ранее, нет возможности задать закон преобразования при произвольных вращениях, которому должна подчиняться спиновая[2] волновая функция "частицы" с нефизическим (т.е. не равным целому или полуцелому числу) спином; поэтому волновая функция в этой схеме вообще не должна рассматриваться. Однако билинейные величины ввести можно, а во многих случаях достаточно рассматривать лишь такие величины. Можно задать также их трансформационные свойства при любых вращениях, обобщающие закон преобразования билинейных величин при физическом значении спина. К числу таких билинейных величин относятся, например, матрица плотности и функция Грина одной частицы и волновая функция системы из двух частиц, спины которых отличаются на целое или полуцелое число;

---

[1] Эта мысль была высказана И.С. Шапиро.

[2] Ниже мы говорим всюду только о спиновой степени свободы.

из этих же величин могут быть сконструированы амплитуды процессов, в которых участвуют "частицы" с комплексным спином.

Возможность такого построения основана на том, что, с одной стороны, билинейные величины преобразуются по представлению, являющемуся прямым произведением двух НП, а с другой стороны, удается обобщить на комплексные s_1 и s_2 (если $s_1 - s_2$ есть целое или полуцелое число) понятие прямого произведения двух НП весов s_1 и s_2 (но не отдельного НП). Покажем, как провести такое обобщение для случая $s_1 = s_2$, а именно, рассмотрим поляризационную матрицу плотности "частицы" с комплексным спином s.

Если реализовать НП группы $SU(2)$ веса s в пространстве многочленов комплексной переменной z степени не выше $2s$, то оператор представления будет действовать по формуле

$$\hat{T}_u^{(s)}\Psi(z) = (\beta z + \bar{\alpha})^{2s}\Psi\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right),$$

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \in SU(2). \qquad (1)$$

Попытка непосредственного обобщения трансформационного закона (1) на нефизические s наталкивается на препятствие: при нецелых $2s$ выражение $(\beta z + \bar{\alpha})^{2s}$ лишено однозначного смысла. В этой же реализации матрица плотности

$$\rho(z, \bar{z}') = \sum_{n=1}^{2s+1} w_n \Psi_n(z)\overline{\Psi_n(z')} \qquad (2)$$

($\Psi_n(z)$ – базисные функции, например, собственные функции оператора проекции спина) есть функция от z и $\bar{z}'$, которая, в силу своего полиномиального характера, однозначно восстанавливается по своим значениям $\rho(z, \bar{z})$ при $z' = z$. Из формулы (1) следует, что закон преобразования функции $\rho(z, \bar{z})$ имеет вид

$$(\hat{T}_u^{(s)} \otimes \hat{T}_u^{(s)*})\rho(z, \bar{z}) = [(\beta z + \bar{\alpha})(\bar{\beta}\bar{z} + \alpha)]^{2s}\rho\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}, \frac{\bar{\alpha}\bar{z} - \beta}{\bar{\beta}\bar{z} + \alpha}\right). \qquad (3)$$

Здесь в степень $2s$ возводится вещественное неотрицательное число; результат такой операции однозначно определен при любом комплексном s, поэтому формула (3) может быть принята в качестве трансформационного закона для поляризационной матрицы плотности "частицы" с любым комплексным спином.

С групповой точки зрения формула (3) может служить определением оператора представления $T^{(s)} \otimes T^{(s)*}$, являющегося произведением НП комплексного веса s на сопряженное[1]; однако это "произведение" не может быть расщеплено на сомножители. Чтобы найти запас функций, образующих пространство представления $T^{(s)} \otimes T^{(s)*}$, заметим, что при целых значениях $2s$ это представление является сужением на группу $SU(2)$ НП группы $SL(2,C)$ веса $(2s, 2s)$. Обобщая это утверждение на комплексные s (теперь оно служит определением того, что мы понимаем под представлением $T^{(s)} \otimes T^{(s)*}$), мы придем снова к трансформационному закону (3), а также к определению пространства D представления $T^{(s)} \otimes T^{(s)*}$: оно совпадает с пространством НП группы $SL(2,C)$, т.е. состоит из функций $\rho(z, \bar{z})$, бесконечно дифференцируемых во всей плоскости вместе со своими инверсиями $\check{\rho}(z, z) = (z\bar{z})^{2s} \rho(-1/z, -1/\bar{z})$.

Мы можем интерпретировать как матрицы плотности те из функций $\rho(z, \bar{z})$, которые удовлетворяют ряду условий (обобщающих условия нормировки, эрмитовости и неотрицательности); примером может служить матрица плотности "частицы" с магнитным моментом μ, находящейся в термодинамическом равновесии в магнитном поле:

$$\rho(z, \bar{z}) = \frac{\operatorname{sh}(\mu H/2T)}{\operatorname{sh}[(2s+1)\mu H/2T]} (e^{\mu H/2T} + z\bar{z}e^{-\mu H/2T})^{2s}. \qquad (4)$$

Мы можем также задать способ вычисления средних значений "наблюдаемых" в каждом из таких состояний; например,

$$\langle s_z \rangle = \frac{2s+1}{\pi} \int \frac{d^2 z}{(1+z\bar{z})^{2s+2}} \left(s\rho(z, \bar{z}) - z \frac{\partial \rho(z, \bar{z})}{\partial z} \right). \qquad (5)$$

Аналогично вычисляются средние значения других проекций спина или любого полинома из операторов проекций спина.

Однако непосредственное вычисление вероятностей различных "результатов измерения" невозможно, так как для этого нужно было бы спроектировать данную матрицу плотности на чистое состояние, а для чистых состояний в пространстве D места нет. Например, чистое состояние с проекцией спина σ на ось z должно было бы описываться матрицей плотности

$$\rho(z, \bar{z}) = \frac{\Gamma(2s+1)}{\Gamma(s-\sigma+1)\Gamma(s+\sigma+1)} (z\bar{z})^{s-\sigma}, \qquad (6)$$

---

[1] Заметим, что НП $T^{(s)*}$ эквивалентно представлению $T^{(s)}$.

однако эта функция ни при каком σ не принадлежит D. Поэтому термины "матрица плотности" и "среднее значение" имеют в значительной мере условный характер.

Заметим, что введенные выше представления $T^{(s)} \otimes T^{(s)*}$ эквивалентны друг другу при всех нефизических s: каждое из них есть бесконечная прямая сумма всех однозначных НП группы вращений

$$T^{(s)} \otimes T^{(s)*} = \sum_{l=0}^{\infty} \oplus T^{(l)}, \tag{7}$$

однако формулы для вычисления средних значений различны для разных s (см., например, (5)).

Аналогичное построение может быть проведено и для других билинейных по волновой функции величин. Например, функции из пространства D могут интерпретироваться не как матрицы плотности одной частицы, а как спиновые волновые функции системы из двух частиц со спином s. Тогда из разложения (7) следует, что такая система может находиться в состоянии с произвольным целым значением полного спина.

Более подробному изложению данной схемы будет посвящена другая публикация.

Автор благодарен И.С.Шапиро, привлекшему его внимание к проблеме комплексного спина, за интерес к работе и ценные обсуждения.

Поступило в редакцию
28 июля 1968 г.

Литература

[1] E. G. Beltrametti, G. Luzzatto. Nuovo Cim., 51A, 147, 1967.
[2] В.С.Попов, Э.И.Долинский. ЖЭТФ, 46, 1829, 1964.
[3] J. Gunson. J. Math. Phys., 6, 852, 1965.
[4] С.С.Санников, Укр.физ.ж., 12, 873, 1967.
[5] M. Toller. Nuovo Cim., 37. 631, 1965.
[6] W. Holman III, L. C. Biedenharn. Ann. of Phys., 39, 1, 1966.