ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ФОРМ-ФАКТОРА π-МЕЗОНА

Л.А.Халфин, Ю.П.Щербин

1. В работе одного из авторов (Л.А.Х.) [1] были получены дисперсионные правила сумм (ДПС) для формфакторов элементарных частиц. Эти ДПС связывают между собой поведение формфактора $G(t)$ при $t \leqslant 0$ и поведение $G(t)$ при $t \geqslant t_0$,[1] которое определяется сечением в аннигиляционном канале. Из этих ДПС можно получить, как было указано в [1], оценку[2] электромагнитного радиуса элементарных частиц.

2. В настоящей работе исследуются ДПС для формфактора $G(t)$ π-мезона. В этом случае $t_0 = 4m_\pi^2$, $G(t)$ – вещественна при $t < t_0$ при $t \leqslant 0$ формфактор $G(t)$ исследовался экспериментально во многих работах [3]. При $t \geqslant t_0$ $G(t)$ определен через сечение аннигиляции

$$e^- + e^+ \to \pi^- + \pi^+, \tag{1}$$

которая была недавно изучена с помощью электронпозитронных встречных пучков [4].

3. На основании методов работы [1] получены следующие ДПС:

$$i = \int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{G(t)\ dt}{\sqrt{(t-t_2)(t_1-t)(t_0-t)}} = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{\mathrm{Re}\, G(t)\ dt}{\sqrt{(t-t_2)(t-t_1)(t-t_0)}} \equiv j \tag{2}$$

$$p = \int\limits_{t_2}^{t_1} \frac{\ln G(t)\ dt}{\sqrt{(t-t_2)(t_1-t)(t_0-t)}} = \int\limits_{t_0}^{\infty} \frac{\ln|G(t)|\ dt}{\sqrt{(t-t_2)(t-t_1)(t-t_0)}} \equiv q. \tag{3}$$

В (2), (3) $-\infty < t_2 < t_1 \leqslant 0$. ДПС (2), (3), в частности, отличаются тем, что соответствующим выбором t_1 в них может быть исключена область очень малых $t \in [t_1, 0]$, где $G(t)$ экспериментально определена с малой точностью. При выводе (2) предположено определенное степенное ограничение на асимптотику $G(t)$. ДПС (3) справедливы при всех степенных асимптотиках $G(t)$, однако предполагается, что $G(t)$ не имеет комплексных нулей.

4. Если считать, что реакция (1) в основном идет через ρ-мезон, т.е.

$$e^- + e^+ \to \rho \to \pi^- + \pi^+, \tag{4}$$

---

[1] Обозначения из [1].

[2] Некоторые сходные оценки радиуса элементарных частиц были приведены в [2].

то при $t \geqslant 4m_\pi^2$ (во всяком случае в окрестности резонанса) $|G(t)|$ есть:

$$|G(t)|^2 = \frac{k \quad m_\rho^4}{(t - m_\rho^2)^2 + m_\rho^2 \Gamma_\rho^2} , \tag{5}$$

где на основании [4] $k = 0{,}59 \pm 0{,}15$; $m_\rho = 764 \pm 11$ *Мэв*; $\Gamma_\rho = 93 \pm 15$ *Мэв*. В этих же предположениях

$$ReG(t) = \frac{(m_\rho^2 - t) \; k^{1/2} \; m_\rho^2}{(t - m_\rho^2)^2 + m_\rho^2 \Gamma_\rho^2} . \tag{6}$$

Наиболее точные результаты относительно $G(t)$ были получены в [5] для интервала переданных импульсов $t \in (1 + 6)f^{-2}$. Основной вывод работ [5] состоит в том, что в пределах экспериментальных погрешностей пионный и протонный зарядовые формфакторы идентичны и, следовательно, как протонный, так и π-мезонный $G(t)$ описываются формулой

$$G(t) = [1 - (t/a)]^{-2}, \tag{7}$$

где для π-мезона $a = 0{,}62 \pm 0{,}16$ $(Гэв/c)^2$.

5. Экспериментальные результаты, описанные в п.4 использовались для численного анализа ДПС (2), (3). В системе единиц, где $\hbar = c = 5m_\pi = 1$, t_1 в (2), (3) выбиралось $t_1 = -0{,}02$; значения t_2 изменялись в следующих интервалах $t_2 \in [-0{,}1, -0{,}5]$, $[-0{,}5, -10]$, $[-10, -600]$. Заметим, что максимальное экспериментально изученное значение t в наших единицах соответствует $-t = 0{,}48$. При вычислении использовались значения a в интервале $a \in [0{,}46, 0{,}72]$ $(Гэв/c)^2$, где верхняя граница соответствует нуклонному $G(t)$. Значения k, m_ρ, Γ_ρ выбирались согласно [4]. Вычисления производились на ЭВМ с соответствующим учетом интегрируемых особенностей в (2), (3). Результаты представлены на рис. 1, 2.

6. Как видно из рис. 1 при малых значениях t_2 имеется несогласие между аппроксимацией экспериментальных данных согласно (6), (7). Это можно объяснить как тем, что локальные свойства $G(t)$ плохо описываются при этих малых значениях t формулой (6), так и тем, что при вычислении j подчеркиваются значения t близкие к t_0, для которых аппроксимация в виде (6) явно недостаточна. С увеличением $|t_2|$ согласие между аппроксимационными формулами (6), (7) становится достаточно хорошим, при этом хорошее согласие достигается при $|t_2|$ много больших экспериментально проверенных. Возможно, что согласие i, j улучшится, если в формуле (6) учесть дополнительно далекий резонанс, либо произвести более точный учет нерезонансной зависимо-

сти, в частности, порогового поведения в окрестности $t = t_0$. Как видно из рис. 2, расхождение между p, q при малых t_2 гораздо более значительно. Это связано с тем, что в (3) подчеркиваются те значения t (в частности t близкие к t_0), при которых аппроксимация $G(t)$ ρ-мезонным пиком явно недостаточна. С увеличением $|t_2|$ расхождение

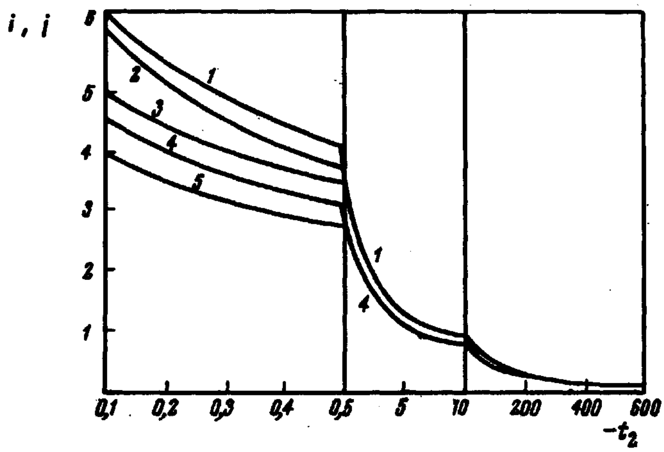

Рис. 1

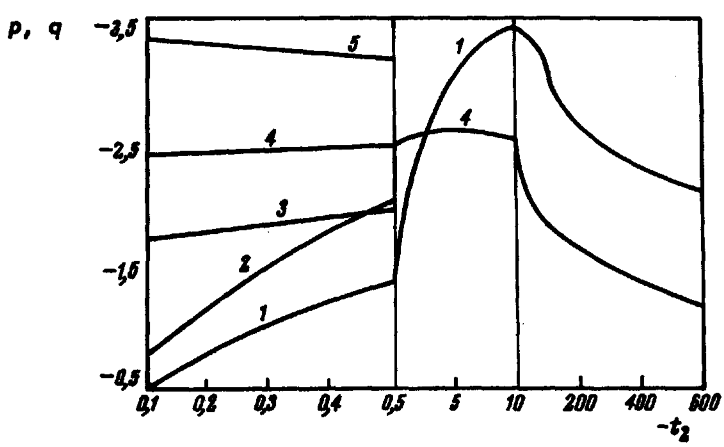

Рис. 2

Кривые *1, 2* – значения i, p соответственно при $a = 0{,}72$; $0{,}46$ $(Гэв/с)^2$; кривые *3, 4, 5* – значения j, q соответственно при $k = 0{,}74$, $m_\rho = 775$ *Мэв*, $\Gamma_\rho = 108$ *Мэв*; $k = 0{,}59$, $m_\rho = 764$ *Мэв*, $\Gamma_\rho = 93$ *Мэв*; $k = 0{,}44$, $m_\rho = 753$ *Мэв*, $\Gamma_\rho = 78$ *Мэв*

уменьшается вплоть до $t_2 \sim -2{,}5$, а при дальнейшем увеличении $|t_2|$ вновь становится значительным. Уменьшение расхождений p, q до $t_2 \simeq -2{,}5$ можно объяснить тем, что при увеличении $|t_2|$ в этой области вклад пороговой области $(t \sim t_0)$ становится менее значимым и резонансное приближение (5) становится достаточно хорошим. Ухудшение же при дальнейшем увеличении $|t_2|$ может быть объяснено как тем, что экстраполяция $G(t)$ согласно (7) может не иметь места, так и тем, что в (3) начинают более сильно подчеркиваться значения $G(t)$ при больших t, где ρ – резонансное поведение явно недостаточно. Учитывая, однако, тенденцию кривых рис. 1 можно думать, что это расхождение при больших $|t_2|$ между p, q объясняется и вкладом возможных комплексных нулей $G(t)$, которые не учтены в (3).

7. Легко показать, что для $t_1 \leqslant t \leqslant t_0$ для $G(t)$ справедливо следующее дисперсионное соотношение:

$$\ln G(t) = \frac{[(t_0 - t)(t - t_1)(t - t_2)]^{1/2}}{\pi} \cdot \left[\int_{t_0}^{\infty} \frac{\ln|G(t')|\,dt'}{\sqrt{(t'-t_0)(t'-t_1)(t'-t_2)}(t'-t)} - \int_{t_2}^{t_1} \frac{\ln G(t')\,dt'}{\sqrt{(t_0-t')(t_1-t')(t'-t_2)}(t'-t)} \right]. \quad (8)$$

С помощью (8) можно в принципе вычислить поведение $G(t)$ при $t \sim 0$ и тем самым оценить э.м. радиус π-мезона. Предварительные расчеты показывают, что при $t \gtrsim t_0$ необходимо более корректное представление $|G(t)|$, чем то, что дается (5). В недавней работе [6] оценивался радиус π-мезона с использованием только экспериментальных данных о ρ-резонансе. Формула, по которой производилась оценка в [6] является частным случаем ДПС (3). В [6] получена очень грубая оценка, ибо, как показано выше, в области малых t ДПС выполнены в этих приближениях плохо. В принципе (8) использует больше экспериментальной информации и можно надеяться получить более точную оценку для $\langle r_\pi \rangle$.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В.А. Стеклова
Ленинградский
государственный университет
им. А.А. Жданова

Поступило в редакцию
9 сентября 1968 г.

Литература

[1] Л.А.Халфин. ЯФ, 7, 876, 1968.

[2] Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 7, 1111, 1968.

[3] F.S.Crowford. Phys. Rev., 117, 1119, 1960; J.Allen et al. Nuovo Cim, 32, 1114, 1964; В.Г.Гришин и др. ЯФ, 2, 886, 1965; M.M.Sternheimer, R.Hofstadter. Nuovo Cim, 38, 1854, 1966; M.E.Norberg, K.F.Kinsey. Phys. Lett., 20, 692, 1966.

[4] V.L.Auslander et al. Phys. Lett., 25B, 433, 1967.

[5] C.W.Akerlof et al. Phys.Rev., 163, 5, 1482, 1968; M.M.Block. et al. Phys. Rev., 169, 1074, 1968.

[6] J.E.Bowcock, Th. Kannelopoulos. Nucl. Phys., B4, № 4, 417, 1968.