

# Структура основного сверхтекучего состояния газа ферми-атомов вблизи резонанса Фешбаха

Ю. Каган<sup>1)</sup>, Л. А. Максимов

Российский научный центр “Курчатовский институт”, 123182 Москва, Россия

Поступила в редакцию 6 июня 2005 г.

В рамках вариационного подхода исследуется основное состояние газа ферми-атомов вблизи резонанса Фешбаха при отрицательной длине рассеяния. Структура возникающего сверхтекучего состояния образуется двумя когерентно связанными подсистемами: подсистемой квазимолекул в закрытом канале и подсистемой пар атомов в открытом канале. Найденная система уравнений позволяет описать свойства основного состояния при произвольном значении параметров, в частности, найти щель в спектре одночастичных фермиевских возбуждений и скорость звука, характеризующую ветвь коллективных бозевских возбуждений.

PACS: 03.75.Kk, 67.60.–g, 74.20.Mn

В последнее время сформировалось и активно развивается направление исследований, связанное с ультрахолодными газами ферми-атомов и образованными на их основе бозе-молекулами. Решающим здесь было использование резонанса Фешбаха (РФ) для парного взаимодействия низкоэнергетических ферми-частиц. Зависимость положения резонанса от постоянного магнитного поля  $B$  определило уникальную возможность для непрерывного изменения эффективного межчастичного взаимодействия и смены его знака (знака длины рассеяния  $a$ ) с изменением поля [1].

За сравнительно короткий промежуток времени исследования в этой области прошли несколько этапов. На первом из них было продемонстрировано рождение ультрахолодных молекул  $^{40}\text{K}_2$  [2] и  $^6\text{Li}_2$  [3–5] вблизи РФ при значениях  $B$ , соответствующих положительной длине рассеяния и, тем самым, наличию истинного связанного состояния вблизи порога диссоциации, в обоих случаях резонанс был в канале  $S$ -рассеяния. Для поляризованных по электронному спину фермионов это предполагает взаимодействие неидентичных атомов в разных сверхтонких состояниях.

Было найдено, что в таком возбужденном состоянии образовавшиеся молекулы живут относительно долго. Это предопределяет возможность квази-адиабатического перехода с изменением  $B$  из состояния с  $a < 0$ , где истинные молекулы не образуются, в состояние с  $a > 0$ , и обратно. Природа подавления неупругих процессов при столкновениях с переходом

молекул на более глубокие уровни была последовательно объяснена в [6].

Сохранение молекул на одном колебательном уровне облегчает создание условий для бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в возникающем газе композитных бозонов. В явной форме конденсация возбужденных молекул была обнаружена как в газе атомов  $^{40}\text{K}$  [7], так и в газе атомов  $^6\text{Li}$  [8–10].

Наибольший интерес в этой области представляет изучение газа ферми-атомов вблизи РФ при значениях магнитного поля, соответствующих длинам рассеяния  $a < 0$ .

Возможность выбора параметров, превращающего разреженный газ в систему сильно взаимодействующих частиц при одновременном отсутствии реальных молекул, делает особенно интересным анализ возникающего в этих условиях многочастичного сверхтекучего состояния. Вопрос об использовании РФ для достижения сверхтекучести в газе ультрахолодных ферми-атомов обсуждался в [11, 12]. Проблема перестройки сверхпроводящего состояния при переходе от слабого к сильному притяжению рассматривалась ранее в известных работах [13, 14]. При этом взаимодействие носило одноканальный характер и спиновая конфигурация оставалась неизменной (см. недавнюю работу [15]). Принципиальной особенностью РФ является двухканальный характер взаимодействия. Частицы в непрерывном спектре взаимодействуют через образование промежуточного квазимолекулярного состояния в другой спиновой конфигурации. При этом мгновенный снимок фиксирует двухкомпонентный характер системы с парами частиц в квазимолекулярном или свободном состояниях. Между обеими подсистемами реализуется ди-

<sup>1)</sup>e-mail: kagan@kurm.polyn.kiae.su

намический когерентный обмен, обеспечивающий в равновесии постоянство на амплитудном уровне заселенности квазимолекулярного состояния, распадаемого в вакууме. Когерентная суперпозиция квазимолекулярных состояний и пар атомов в непрерывном спектре обеспечивает формирование сверхтекучего состояния с единым конденсатом.

Картина такого состояния была выявлена экспериментально сначала в газе  $^{40}\text{K}$  [16], а затем и в газе  $^6\text{Li}$  [17]. Идея эксперимента состояла в адиабатическом проектировании состояния при  $a < 0$  на истинно молекулярное состояние  $a > 0$  за счет достаточно быстрого изменения  $B$ , предохраняющего от формирования конденсата в процессе перехода. Специальные измерения подтвердили последнее предположение (см., в частности, недавнюю работу [18]). Экспериментальные результаты в этой области стимулировали появление ряда теоретических работ [19–23] с попыткой микроскопического описания системы сильно взаимодействующих ферми-атомов, использующей, однако, те или иные варианты теории возмущений.

Настоящая работа посвящена нахождению основного состояния системы взаимодействующих ферми-атомов вблизи РФ при  $a < 0$  в рамках вариационного подхода. Как следствие, возникает возможность единого описания основного состояния при произвольном соотношении параметров.

Выбор макроскопической вариационной функции  $\Psi_0$  отражает тот факт, что основное состояние системы в окрестности РФ есть единое состояние, в существенной степени образованное двумя когерентно связанными подсистемами: подсистемой ферми-атомов в состоянии типа БКШ и подсистемой бозевских квазимолекул в конденсатном состоянии. Помимо этого,  $\Psi_0$  содержит состояния квазимолекул с не равным нулю импульсом центра тяжести  $k \neq 0$  и пар атомов с не равным нулю суммарным импульсом. Это позволяет включить с самого начала в вариационную процедуру надконденсатные возбужденные состояния (температура  $T = 0$ ), играющие при формировании основного состояния системы в общем случае заметную роль. Полученная система уравнений дает возможность, в частности, найти щель в спектре одночастичных возбуждений и скорость звука, характеризующую ветвь коллективных бозевских возбуждений, и, тем самым, определить критическую скорость.

В настоящей работе мы приведем в явной форме решение этой системы уравнений для предельных случаев, допускающих аналитическое решение, ограничиваясь предположением о малости константы ре-

зонансного взаимодействия. Численное решение в общем случае будет представлено в отдельной работе.

Чтобы сделать анализ максимально прозрачным, мы ограничимся рассмотрением однородной системы. Обмен между подсистемами ферми-атомов и квазимолекул при сохранении общего числа атомов предопределяет появление единого химического потенциала  $\mu$ . При этом обобщенный гамильтониан системы может быть записан в виде

$$\hat{H}' = \hat{H} - \mu \hat{N} = \sum_{p,\sigma} \xi_p \hat{a}_{p\sigma}^+ \hat{a}_{p\sigma} + \sum_k \zeta_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k + \hat{V} + \hat{V}'_a + \hat{V}''_a. \quad (1)$$

Здесь  $\hat{a}_{p\sigma}$  – оператор поглощения ферми-атома в открытом канале, индекс  $\sigma = 1, 2$  идентифицирует сверхтонкое состояние атома в двухкомпонентной смеси;  $\hat{b}_k$  – оператор поглощения квазимолекул;

$$\xi_p = \hbar^2 p^2 / 2m - \mu, \quad \zeta_k = \zeta_0 + \hbar^2 k^2 / 4m, \quad \zeta_0 = \varepsilon_0 - 2\mu,$$

где  $\varepsilon_0$  – положение резонансного уровня в закрытом канале,  $m$  – масса атома (мы пренебрегаем отличием сверхтонкой энергии в состояниях 1 и 2). Оператор

$$\hat{V} = g \sum_{p,k} (\hat{b}_k^+ \hat{a}_{k/2-p,2} \hat{a}_{k/2+p,1} + \hat{a}_{k/2+p,1}^+ \hat{a}_{k/2-p,2}^+ \hat{b}_k) \quad (2)$$

соответствует обменному резонансному взаимодействию между частицами в открытом и закрытом каналах. (Здесь и в дальнейшем предполагается, что объем  $\Omega = 1$ .)

Из нерезонансного взаимодействия между атомами в открытом канале в (1) выделено в явном виде взаимодействие пар с нулевым суммарным импульсом

$$\hat{V}'_a = U_0 \sum_{p_1, p_2} \hat{a}_{p_1,1}^+ \hat{a}_{-p_1,2}^+ a_{-p_2,2} a_{p_2,1}, \quad (3)$$

$$\hat{V}''_a = U_0 \sum_{p_1, p_2, q \neq 0} \hat{a}_{p_1,1}^+ \hat{a}_{q-p_1,2}^+ a_{q-p_2,2} a_{p_2,1}. \quad (4)$$

Гамильтониан в форме (1) фактически совпадает с широко используемым при анализе газа в условиях РФ (см., например, [19–23]). Отличие только в учете взаимодействия (4), роль которого в общем случае может быть заметной. Строго говоря, в гамильтониане (1) опущены члены нерезонансного взаимодействия атомов с квазимолекулами и квазимолекул между собой. Однако оба эти взаимодействия порождаются резонансным взаимодействием (2).

Многочастичную вариационную функцию выберем в форме

$$\Psi_0 = \hat{\Psi}_M \hat{\Psi}'_M \hat{\Psi}_A |0\rangle. \quad (5)$$

Полевой оператор атомов имеет обычное представление:

$$\hat{\Psi}_A = \prod_p [u_p + v_p \hat{a}_{p,1}^+ \hat{a}_{-p,2}^+].$$

В когерентном представлении полевой оператор квазимолекул в состоянии  $k = 0$  имеет вид (предполагается, что число таких квазимолекул  $M_0$  велико)

$$\hat{\Psi}_M = e^{-\frac{1}{2}M_0} \exp\left(\sqrt{M_0} \hat{b}_0^+\right).$$

Существенной особенностью структуры многочастичной вариационной функции (5) является включение в нее состояний, связанных с виртуальным рождением возбужденных квазимолекул. Соответствующий оператор представлен в форме

$$\hat{\Psi}'_M = \prod_{k \neq 0} [F_k + G_k \sum_p \hat{b}_k^+ \hat{a}_{k/2-p,2} \hat{a}_{k/2+p,1}].$$

Заметим, что порядок операторов в (5) существенен: оператор  $\hat{\Psi}'_M$  действует на состояние, возникшее в результате действия оператора  $\hat{\Psi}_A$  на вакуум. Нормировка функции (5) приводит к двум соотношениям:

$$u_p^2 + v_p^2 = 1, \quad F_k^2 + w_k G_k^2 = 1, \quad (6)$$

где

$$w_k = \sum_p v_{p+k/2}^2 v_{p-k/2}^2. \quad (7)$$

(Мы предполагаем, что коэффициенты  $u_p$ ,  $v_p$ ,  $F_k$ ,  $G_k$  – действительны.)

Вариационная процедура сводится к нахождению энергии

$$\bar{E} = \langle \Psi_0 | \hat{H}' | \Psi_0 \rangle$$

и варьированию ее по функциям  $v_p$ ,  $G_k$ ,  $M_0$  с учетом соотношений (6). Принимая во внимание структуру вариационной функции (5) и вид гамильтониана (1), находим

$$\begin{aligned} \bar{E} = & 2 \sum_p \xi_p v_p^2 + \zeta_0 M_0 + 2\sqrt{M_0} \sum_p g u_p v_p + \\ & + \sum_{k \neq 0} w_k (\zeta_k G_k^2 + 2g G_k F_k) + \\ & + U_0 \left( \sum_p u_p v_p \right)^2 + U_0 \left( \sum_p v_p^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При принятом единичном объеме величина  $M_0$  фактически равна плотности квазимолекул с  $k = 0$ .

При последовательном выводе (8) функции  $v_p^2$  умножаются на фактор  $\exp(-z_p)$ , а  $u_p v_p$  – на фактор  $\exp(-2z_p)$ , где  $z_p = \sum_k G_k^2 v_p^2 v_{p-k}^2$ . Непосредственные вычисления показывают, что величина  $z_p$  оказывается малой по сравнению с единицей, по крайней мере в интересующей нас области параметров, и учет этих факторов практически не сказывается на результатах вариационной процедуры; мы положим их равными 1.

Варьируя по  $v_p$ , находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{E}}{\delta v_p} = & 4\xi_p v_p + \\ & + \left( u_p - \frac{v_p^2}{u_p} \right) [2\sqrt{M_0} g + 2U_0 \sum_{p'} u_{p'} v_{p'}] + \\ & + 4U_0 v_p \sum_{p'} v_{p'}^2 + \\ & + \sum_{k \neq 0} \frac{\partial w_k}{\partial v_p} (\zeta_k G_k^2 + 2g G_k F_k - g w_k \frac{G_k^3}{F_k}) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Варьируя по  $G_k$ , с учетом соотношений (6) имеем

$$\frac{\delta \bar{E}}{\delta G_k} = \frac{2w_k}{F_k} [\zeta_k G_k F_k + g - 2g w_k G_k^2] = 0. \quad (10)$$

Используя это уравнение и соотношение, вытекающее из (7),

$$\partial w_k / \partial v_p = 4v_{p-k}^2 v_p,$$

перепишем (9) в виде

$$2\xi_p' u_p v_p + (1 - 2v_p^2) [\sqrt{M_0} g + U_0 \sum_{p'} u_{p'} v_{p'}] = 0. \quad (11)$$

Здесь

$$\xi_p' = \xi_p + d_p, \quad d_p = \sum_{k \neq 0} v_{p-k}^2 g G_k F_k + U_0 \sum_{p'} v_{p'}^2. \quad (12)$$

Наконец, варьируя по  $M_0$ , находим

$$\zeta_0 + g \frac{1}{\sqrt{M_0}} \sum_p u_p v_p = 0. \quad (13)$$

Экстремум, определяемый условиями (10), (11), (13), соответствует минимуму энергии при выполнении условий

$$g u_p v_p < 0, \quad g G_k F_k < 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что первый член в (12) и второй в (13) отрицательны. Для определенности, в дальнейшем мы примем  $g > 0$ .

Введем обозначение

$$\Delta = g\sqrt{M_0} + U_0 \sum_p u_p v_p.$$

Решая уравнение (11) с учетом (6), находим выражения, аналогичные теории БКШ:

$$v_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi'_p}{E_p} \right), \quad u_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi'_p}{E_p} \right), \quad (14)$$

$$2u_p v_p = -\frac{\Delta}{E_p}, \quad E_p = \sqrt{\xi_p'^2 + \Delta^2}.$$

При этом уравнение для щели  $\Delta$  принимает вид

$$\Delta + \frac{1}{2}U_0 \sum_p \frac{\Delta}{E_p} = g\sqrt{M_0}. \quad (15)$$

Одновременно преобразуется и уравнение (13):

$$\varepsilon_0 - 2\mu = \frac{1}{2}g \frac{1}{\sqrt{M_0}} \sum_p \frac{\Delta}{E_p}. \quad (16)$$

Интересно, что роль виртуальных возбужденных квазимолекул в (15), (16) сводится к перенормировке спектра атомов (см. (12), (14)).

Решение уравнения (10) с учетом (6) позволяет непосредственно найти

$$G_k^2 = \frac{1}{2w_k} \left( 1 - \sqrt{\frac{\zeta_k^2}{\zeta_k^2 + 4g^2w_k}} \right). \quad (17)$$

Уравнения (15), (16) формально содержат расходящийся на верхнем пределе интеграл. Эта расходимость связана с характером введения параметров  $\varepsilon_0$ ,  $g$  и  $U_0$  в гамильтониане (1). В общем случае это требует введения обрезания сверху области импульсов, где эффективно реализуется взаимодействие. Однако в некоторых важных случаях такое обрезание возникает естественным образом.

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда определяющим является резонансное взаимодействие ( $U_0 = 0$ ). Тогда из уравнения (15) имеем

$$\Delta_0 = g\sqrt{M_0}. \quad (18)$$

Величина  $\varepsilon_0$  в гамильтониане (1) соответствует положению резонансного уровня при  $g = 0$ . Но при  $g \neq 0$  энергия уровня перенормируется уже в пределе плотности, стремящейся к нулю, то есть в вакууме. Это можно проследить непосредственно, вычислив в этом пределе амплитуду рассеяния пары атомов (с нулевым суммарным импульсом), определяемую взаимодействием (2). Суммируя ряд теории возмущений, получим (ср. [23])

$$f(E) = -\frac{\hbar s / \sqrt{m}}{E - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}g^2 \sum_p \varepsilon_p^{-1} + is\sqrt{E}}, \quad s = \frac{m^{3/2}}{4\pi\hbar^3} g^2.$$

Видно, что при  $g \neq 0$  энергия резонансного уровня перенормируется и при  $E \rightarrow 0$  принимает значение

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0 - \frac{1}{2}g^2 \sum_p \frac{1}{\varepsilon_p}.$$

В многочастичной задаче естественно именно величину  $\tilde{\varepsilon}_0$  рассматривать как реальное положение резонансного уровня. Вычитая в (16) с обеих сторон  $\frac{1}{2}g^2 \sum_p \frac{1}{\varepsilon_p}$  и принимая во внимание (18), имеем

$$\tilde{\varepsilon}_0 - 2\mu = \frac{1}{2}g^2 \sum_p \left( \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\varepsilon_p} \right). \quad (19)$$

При учете нерезонансного взаимодействия ситуация усложняется. Однако, рассматривая совместно (15) и (16), мы находим уравнение, снова не содержащее расходимости:

$$\tilde{\varepsilon}_0 - 2\mu = \frac{1}{2}g^2 \sum_p \left( \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\varepsilon_p} \right) - \frac{g^2}{U_0} \frac{(\Delta - \Delta_0)^2}{\Delta \Delta_0}. \quad (20)$$

Если воспользоваться известным соотношением между  $U_0$  и нерезонансной длиной рассеяния  $a_{Bg}$  при выходе за борновское приближение (см. [24]), то уравнение для щели (15) можно преобразовать к виду

$$\Delta + \frac{1}{2}\Delta \frac{4\pi\hbar^2}{m} a_{Bg} \sum_p \left( \frac{1}{E_p} - \frac{1}{\varepsilon_p} \right) = g\sqrt{M_0}. \quad (21)$$

При  $g = 0$  это уравнение сводится к известному в теории сверхпроводимости уравнению (см. [13]). Предполагая, что при чисто нерезонансном взаимодействии газовый параметр мал,  $U_0$  в (20) и (12) может быть заменен на  $4\pi\hbar^2 a_{Bg}/m$ . Решая совместно уравнения (20), (21) и (17), с использованием (6), (12) и (14), найдем величины  $\Delta$ ,  $M_0$ ,  $G_k^2$  как функции химического потенциала  $\mu$  при фиксированных  $g$ ,  $a_{Bg}$ , и  $\tilde{\varepsilon}_0$ .

Найденные значения позволяют определить число атомов:

$$N_A = \sum_{p,\sigma} \langle \Psi_0 | \hat{a}_{p\sigma}^+ \hat{a}_{p\sigma} | \Psi_0 \rangle = 2 \sum_p v_p^2 = \sum_p \left( 1 - \frac{\xi'_p}{E_p} \right), \quad (22)$$

и число виртуально возбужденных молекул:

$$M' = \sum_{k \neq 0} \langle \Psi_0 | \hat{b}_k^+ \hat{b}_k | \Psi_0 \rangle = \sum_{k \neq 0} w_k G_k^2. \quad (23)$$

Соотношение для полного числа атомов в системе

$$N_A + 2M_0 + 2M' = N_t \quad (24)$$

определяет уравнение для нахождения химического потенциала  $\mu(N_t)$ .

Как следствие, могут быть найдены относительные значения  $N_A/N_t, M_0/N_t, M'/N_t$  как функции  $\tilde{\varepsilon}_0/2\varepsilon_t$  при фиксированном безразмерном параметре

$$\gamma = g\sqrt{N_t}/\varepsilon_t. \quad (25)$$

Здесь  $\varepsilon_t$  – энергия Ферми, соответствующая полной плотности невзаимодействующих атомов, равной  $N_t$ . Следует специально отметить, что найденная система уравнений справедлива только в интервале изменения  $\varepsilon_0/2\varepsilon_t$ , где сохраняется условие  $M_0 \gg 1$ .

Сделаем одно замечание. В сильно взаимодействующей многочастичной системе суперпозиционный характер основного состояния вблизи РФ делает сравнительно условными определения “атомы”, “молекулы”. Фактически, это проекции многочастичной волновой функции на соответствующие состояния.

В настоящей работе мы приведем решение полученной системы уравнений в некоторых предельных случаях, допускающих аналитическое описание. Пусть сначала  $g \rightarrow 0$  и  $U_0 > 0$ . Из уравнения (21) при этом следует  $\Delta = 0$ , а из (17)  $G_k = 0$ .

Согласно (20), в этих условиях химический потенциал  $\mu = \tilde{\varepsilon}_0/2$  при произвольном  $U_0 \neq 0$ . Число частиц в атомной фазе равно

$$N_A = 2 \sum_p \theta(-\xi'_p)$$

с величиной  $\xi'_p$ , согласно (12), равной

$$\xi'_p = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_0 + \frac{1}{2}U_0 N_A.$$

Принимая во внимание (24) и тот факт, что  $M'_{g=0} = 0$ , непосредственно находим, что в интервале

$$0 < \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_0 < \varepsilon_t + \frac{1}{2}U_0 N_t \quad (26)$$

газ атомов в нормальном состоянии находится в равновесии с конденсатом квазимолекул. На левой границе при  $\tilde{\varepsilon}_0 \rightarrow 0$  число атомов  $N_A \rightarrow 0$ , и все частицы оказываются в конденсате квазимолекул. С ростом  $\tilde{\varepsilon}_0$  значение  $M_0$  непрерывно падает, и на правой границе интервала (26)  $N_A = N_t$ , то есть появляется чисто атомарная фаза. При  $U_0 < 0$  картина поведения  $M_0$  и  $N_A$  остается качественно такой же, но конденсат квазимолекул исчезает с ростом  $\varepsilon_0$  раньше, приблизительно при  $\frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_0 \simeq \varepsilon_t - \frac{1}{2}|U_0| N_t$ . На самом деле это смещение несколько усиливается за счет появления щели  $\Delta$  в спектре атомов, которая находится из решения уравнения (21) при  $g \rightarrow 0$ .

Рассмотрим теперь решение полученной выше системы уравнений, когда доминирующим является резонансное взаимодействие, и опустим члены с  $U_0$ . Ограничимся значениями  $g$ , которым отвечает малый безразмерный параметр  $\gamma \ll 1$ . При этом в соответствии с (18) и (25)  $\Delta/\varepsilon_t = \gamma\sqrt{M_0/N_t} \ll 1$ .

Можно непосредственно проследить, что в (12)  $|d_p| \sim \gamma^m, m \geq 5/2$ , и перенормировкой спектра можно пренебречь. Начнем с рассмотрения интервала  $\tilde{\varepsilon}_0 \gg \Delta$ . В этом случае из уравнений (19) сразу находим

$$\mu = \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_0 - \frac{3}{8}\gamma^2 (\mu\varepsilon_t)^{1/2} \ln(\mu/\Delta). \quad (27)$$

Вычисляя (22), для числа атомов имеем

$$\frac{N_A}{N_t} = \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{3/2} + O\left(\frac{\Delta^2}{\mu^2}\right).$$

Определяя в пределе  $\tilde{\varepsilon}_0 \gg \Delta$  величины  $w_k$  (7),  $G_k^2$  (17), для числа надконденсатных квазимолекул (23) получаем

$$\frac{2M'}{N_t} \simeq \frac{1}{2}\gamma^{3/2} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{9/8}.$$

Воспользовавшись соотношением (24), находим число конденсатных квазимолекул

$$\frac{2M_0}{N_t} \simeq 1 - \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\gamma^{3/2} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{9/8}. \quad (28)$$

Значение  $(\tilde{\varepsilon}_0/2\varepsilon_t)_*$ , где  $M_0$  исчезает, можно приближенно найти, если в (27) опустить второй член.

$$\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_0}{2\varepsilon_t}\right)_* \simeq 1 - \frac{4}{3}\gamma^{3/2}. \quad (29)$$

В узком интервале  $\sim \gamma^{3/2}$  вблизи этой границы число возбужденных квазимолекул  $M'$  оказывается больше, чем  $M_0$ . С уменьшением  $\tilde{\varepsilon}_0$  число конденсатных частиц  $M_0$  быстро растет, и  $M_0 \gg M'$ .

Найдем теперь значение скорости звука  $C$  в системе. При равновесном обмене атомов между обеими подсистемами скорость звука определяется термодинамическим соотношением

$$C^2 = \frac{N_t}{m} \frac{\partial \mu}{\partial N_t}, \quad (30)$$

характерным для однокомпонентных систем (см., например, [24]). При  $g \rightarrow 0$  имеем  $C^2 = 0$ . Этот результат является следствием перетекания ферми-частиц при сжатии в квазимолекулярную подсистему и  $\partial p/\partial p = 0$ .

Аналогичный эффект имеет место в идеальном бозе-газе при  $T < T_c$ , когда с ростом давления часть надконденсатных частиц переходит в конденсат.

При вычислении производной  $\partial\mu/\partial N_t$  существенной оказывается только зависимость  $\Delta$  от  $M_0$  в аргументе логарифма (учет зависимости второго члена в (27) от  $\mu$  дает поправки  $\sim \gamma^2$ ):

$$\frac{\partial\mu}{\partial N_t} = \frac{3}{16}\gamma^2 (\mu\varepsilon_t)^{1/2} \frac{1}{M_0} \frac{\partial M_0}{\partial N_t}.$$

Вспользуемся соотношением (28), опуская при нахождении производной  $\partial M_0/\partial N_t$  последний член в правой части. В производной появляется член, пропорциональный  $(1/M_0)(\partial\mu/\partial N_t)$ , который играет существенную роль вблизи границы (29) на интервале, где  $M_0/N_t$  становится  $\sim \gamma^2$ . Возвращаясь к определению (30), находим общее выражение для скорости звука:

$$C^2 = \frac{C_*^2}{1 + \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{1/2} \frac{3m}{2\varepsilon_t} C_*^2}, \quad (31)$$

$$C_*^2 = \frac{3}{16}\gamma^2 \frac{\varepsilon_t}{m} \left(\frac{\mu}{\varepsilon_t}\right)^{1/2} \frac{N_t}{M_0}.$$

Вдали от границы (29)

$$C^2 = C_*^2. \quad (32)$$

В пределе  $\mu \rightarrow \varepsilon_t$ ,  $M_0 \rightarrow 0$  находим

$$c^2 = \frac{1}{3} \frac{2\varepsilon_t}{m}. \quad (33)$$

Интересно, что это предельное значение достигается со стороны области, где  $M_0 \neq 0$ , а нерезонансное взаимодействие отсутствует. Таким образом, скорость звука как функция  $\tilde{\varepsilon}_0/2\varepsilon_t$  непрерывно растет к значению (33), характерному для коллективного колебания ансамбля свободных ферми-частиц. При  $\gamma^2 \ll 1$  резкий рост  $C^2$  к значению (33) происходит на узком интервале  $\sim \gamma^2$ .

Рассмотрим теперь область  $0 < \tilde{\varepsilon}_0 < \Delta$ . Уравнение (19) в этом пределе принимает вид

$$\mu \simeq \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_0 + 0.8g^2 \frac{(2m)^{3/2}}{4\pi^2} \Delta^{1/2}. \quad (34)$$

Соответственно, из (22) находим

$$\frac{N_A}{N_t} \simeq 0.8\gamma^{3/2} \left(\frac{M_0}{N_t}\right)^{3/4}.$$

Определяя значение  $M'$  из (23), имеем

$$\frac{2M'}{N_t} \simeq \frac{1}{2}\gamma^{21/8}.$$

Из найденных значений сразу следует, что в этой области большинство частиц находятся в конденсате квазимолекул:

$$\frac{2M_0}{N_t} = 1 - \frac{1}{2}\gamma^{3/2} - \frac{1}{2}\gamma^{21/8}.$$

Вспользовавшись соотношениями (30), (34) для скорости звука, находим

$$C^2 \simeq \frac{\varepsilon_t}{3m} \gamma^{5/2}. \quad (35)$$

Из (34) следует, что химический потенциал обращается в нуль при

$$\tilde{\varepsilon}_0 \simeq -\gamma^{5/2}\varepsilon_t.$$

Чтобы получить полную картину, рассмотрим область отрицательных  $\tilde{\varepsilon}_0$ , предполагая  $\Delta \ll |\tilde{\varepsilon}_0|$ . Естественно, в этой области доминируют реальные молекулы. Примесь атомных состояний мала:

$$\frac{N_A}{N_t} = \frac{3}{4}\gamma^2 \left(\frac{2\varepsilon_t}{\tilde{\varepsilon}_0}\right)^{1/2} \frac{M_0}{N_t}. \quad (36)$$

Аналогично и поведение надконденсатных молекул

$$\frac{2M'}{N_t} \simeq \frac{1}{2}\gamma^3 \left(\frac{2\varepsilon_t}{\tilde{\varepsilon}_0}\right)^{3/4}.$$

Соответственно, число молекул в конденсате

$$\frac{2M_0}{N_t} \simeq 1 - \frac{3}{8}\gamma^2 \left(\frac{2\varepsilon_t}{\tilde{\varepsilon}_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\gamma^3 \left(\frac{2\varepsilon_t}{\tilde{\varepsilon}_0}\right)^{3/4}.$$

Уравнение (19) в этом случае преобразуется к виду

$$\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + 0.55g^2 \frac{m^{3/2} |\mu|^{1/2}}{\pi^2} + \frac{m^{3/2}}{32\pi |\tilde{\varepsilon}_0|^{3/2}} g^4 M_0.$$

Отсюда для скорости звука с учетом (25) находим

$$C^2 \simeq \frac{3\pi}{256} \gamma^4 \frac{\varepsilon_t}{m} \left(\frac{2\varepsilon_t}{|\tilde{\varepsilon}_0|}\right)^{3/2}. \quad (37)$$

Появление высокой степени малого параметра в (37) связано с тем, что взаимодействие между молекулами в данном случае происходит через виртуально рожденные ферми-атомы, число которых мало (см. (36)). Отсюда и стремление  $C^2$  к нулю при  $|\tilde{\varepsilon}_0| \rightarrow \infty$ . Сопоставляя (37), (35), (32), (33), мы видим, что скорость звука монотонно возрастает с ростом  $\tilde{\varepsilon}_0$ , достигая максимального значения (33).

Сверхтекучесть и критическая скорость  $v_c$  в рассматриваемой системе определяются одновременно

спектром одночастичных фермиевских возбуждений и коллективных бозевских возбуждений. Соответственно,  $v_c$  принимает минимальное из двух скоростей  $C$  и  $\min(E_p/p)$  (значение  $E_p$  определено согласно (14)). Для  $\tilde{\varepsilon}_0$  в окрестности  $2\varepsilon_t$  критическая скорость определяется фермиевскими возбуждениями, и  $v_c \rightarrow 0$  вместе с  $M_0 \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow 0$  (см. (18)). Скорость  $\min(E_p/p)$  монотонно возрастает с уменьшением  $\tilde{\varepsilon}_0$ , тогда как скорость звука наоборот, падает. При этом критическая скорость продолжает определяться одночастичными возбуждениями вплоть до  $2\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_t \simeq 1/3$ . При меньших значениях  $2\tilde{\varepsilon}_0/\varepsilon_t$ , включая область отрицательных  $\tilde{\varepsilon}_0$ , критическая скорость определяется скоростью звука.

Настоящая работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

1. E. Tiesinga, B. J. Verhaar, and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. A* **47**, 4114 (1993).
2. C. A. Regal, G. Ticknor, J. L. Bohn, and D. S. Jin, *Nature* **424**, 47 (2003).
3. K. E. Strecker, G. B. Partridge, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080406 (2003).
4. S. Jochim et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240402 (2003).
5. J. Cubizolles et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 240401 (2003).
6. D. S. Petrov, C. Solomon, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
7. M. Greiner, C. A. Regal, and D. S. Jin, *Nature* **426**, 537 (2004).
8. S. Jochim et al., *Science* **302**, 2101 (2003).
9. M. W. Zwierlein et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250401 (2003).
10. T. Bourdel et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
11. M. Holland et al., *Phys. Rev. Lett.* **87**, 120406 (2001).
12. E. Timmermans et al., *Phys. Lett. A* **285**, 228 (2001).
13. A. J. Leggett, in *Modern Trends in Theory of Condensed Matter*, Springer-Verlag, Berlin 1980, p. 13.
14. P. Nozières and S. Schmitt-Rink, *J. Low. Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
15. G. Ortitz and J. Dukelsky, *cond-mat/0503664* (2005).
16. C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
17. M. W. Zwierlein et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
18. M. W. Zwierlein et al., *cond-mat/0412675* (2004).
19. Y. Ohashi and A. Griffin, *Phys. Rev. A* **67**, 063612 (2003); *Phys. Rev. Lett.* **89**, 130402 (2002).
20. J. Stajic et al., *Phys. Rev. A* **69**, 063610 (2004).
21. G. M. Bruun and C. J. Pethick, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 140404 (2004).
22. G. M. Falco and H. T. C. Stoof, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130401 (2004).
23. A. V. Andreev, V. Gurarie, and L. Radzihovsky, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 130402 (2004).
24. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика*, ч. 2, М.: Физматлит, 2000.