Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 3, стр. 197 – 200 5 августа 1972 г.

О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ БЕЗ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ

И. С. Шапиро

Из эксперимента Кларка с сотрудниками [1] следует, что вероятность распада $K_L \to 2\mu$ примерно в три раза меньше теоретической нижней границы. Одним из не отвергнутых пока опытом объяснений указанного факта могло бы быть допущение о нарушении принципа суперпозиции (эта возможность, на которую обратил внимание Кобзарев обсуждалась в обзоре Долгова, Захарова и Окуня [2]).

Квантовые уравнения, нарушающие принцип суперпозиции, предлагались ранее Лораном и Рузом [3] с целью объяснения не сохраняющего CP-четность распада $K_L \to 2\pi$. В цитированных работах, однако, вопрос о приемлимости нелинейных квантово-механических уравнений с физической точки зрения не анализировался.

В настоящей статье выясняется, во-первых, что в теории, нарушающей принцип суперпозиции, тем не менее возможна вероятностная интерпретация волновой функции и амплитуд перехода (S-матрицы).

Во-вторых, мы показываем, что в такой теории существуют действительные сохраняющиеся физические величины (энергия, импульс, момент вращения), связанные, как обычно, со свойствами симметрии пространства-времени. В этом смысле можно представить себе существование квантовой физики, в которой принцип суперпозиции не имеет места. Все сказанное иллюстрируется примером систем с конечным числом степеней свободы, т. е. нелинейным обобщением квантовой механики.

Обозначим через $\psi(x, t)$ волновую функцию системы из нескольких частиц, причем под x будем подразумевать совокупность всех координат (для простоты, считаем все частицы бесспиновыми). Нелинейное уравнение для волновой функции можно записать в следующем виде ($h = 1$):

$$[H + F(x, \psi, \psi^*)]\psi = i\frac{\partial \psi}{\partial t}. \qquad (1)$$

Здесь H – линейный эрмитовский оператор, включающий в себя оператор кинетической энергии H_o и потенциалы взаимодействия частиц $V(x)$, а F – нелинейный оператор. Мы будем считать F действительной функцией x, ψ и ψ^* (нелинейности иного типа будут рассмотрены в другой публикации). Предположим также, что все силы короткодействующие, т. е. что при увеличении межчастичных расстояний V и F достаточно быстро убывают. Пусть ψ_1 и ψ_2 два решения уравнения (1). Тогда, используя стандартную процедуру вывода уравнения непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} < \psi_1 | \psi_2 > = i < \psi | F(1) - F(2) | \psi_2 > . \qquad (2)$$

В уравнении (2) для краткости обозначено

$$F(a) \equiv F(x, \psi_a, \psi_a^*),$$

а скалярное произведение $< \psi_1 | \psi_2 >$ определено обычным образом:

$$< \psi_1 | \psi_2 > = \int \psi_1^* \psi_2 \, dx .$$

Если $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, то из (2) следует сохранение нормы:

$$\frac{\partial}{\partial t} < \psi | \psi > = 0 . \qquad (4)$$

Это равенство обеспечивает возможность интерпретации $|\psi(x, t)|^2$ как плотности вероятности, если принять

$$< \psi | \psi > = 1 . \qquad (5)$$

Следует подчеркнуть, что произвольная нормировка ψ-функций не допустима, так как свойства решений уравнения (1) существенно зависят от значения $< \psi | \psi >$. Вероятностная интерпретация фиксирует нормировку (5) и она в дальнейшем должна считаться обязательной.

Из уравнений (3) при $\psi_1 \neq \psi_2$ следует также, что, вообще говоря,

$$\frac{\partial}{\partial t} < \psi_1 | \psi_2 > \neq 0 \ .$$

Неравенство (6) отличает квантовую теорию без принципа суперпозиции от обычной, линейной квантовой механики. Оно, в частности, означает, что ψ-функции, ортогональные в начальный момент времени могут оказаться в будущем не ортогональными. Это обстоятельство весьма значительно сказывается на свойствах S-матрицы. Последняя вводится так же, как в обычной теории с помощью адиабатического выключения взаимодействия при $t = \mp \infty$. Обозначим через $\psi_i(x, t)$ решение уравнения (1) при начальном условии $\phi_i(x)$:

$$\psi_i(x, -\infty) = \psi_i^{(-)} = \phi_i(x).$$

Функции $\phi_i(x)$ – решения волнового уравнения для невзаимодействующих частиц – предполагаются ортонормированными и составляющими полную систему. Тогда, при $t = +\infty$, когда взаимодействие вновь выключено, мы должны иметь:

$$\psi_i(x, +\infty) \equiv \psi_i^{(+)} = \sum_j S_{ij} \phi_j \qquad (7)$$

откуда следует

$$S_{ij} = < \phi_j | \psi_i^{(+)} > \qquad (8)$$

Величины S_{ij} могут быть отождествлены с амплитудами переходов $i \to j$. В самом деле, используя полноту системы ϕ_i и равенства (4) (5), нетрудно получить:

$$\sum_j | S_{ij} |^2 = < \psi_i^{(+)} | \psi_i^{(+)} > = 1 \ . \qquad (9)$$

Таким образом, допустимо считать $| S_{ij} |^2$ вероятностями переходов. С другой стороны, учитывая (6), заключаем, что

$$\sum_j S_{ij} S_{kj}^* = < \psi_k^{(+)} | \psi_i^{(+)} > \neq 0, \quad k \neq i \ , \qquad (10)$$

несмотря на ортогональность ψ-функций при $t = -\infty$. Формула (10) означает, что в квантовой теории без принципа суперпозиции S-матрица не унитарна, но удовлетворяет соотношению

$$SS^+ = 1 + \eta \ ,$$

где эрмитова матрица η имеет, в силу уравнения (9), равные нулю диагональные элементы. Заметим, что унитарным преобразованием $\eta \to U \eta U^+$ матрица η может быть приведена к диагональному виду, но при этом S-матрица не будет преобразовываться канонически ($S \to USU^+$) из-за нелинейной зависимости решений ψ_i от начальных базисных функций ϕ_i.

Рассмотрим теперь вопрос о сохраняющихся физических величинах. Легко показать, что среднее значение $< H + F >$ нелинейного "гамильтониана $H + F$ не сохраняется во времени (за исключением случая стационарных решений) и потому не может быть отождествлено с энергией системы. Для получения сохраняющихся величин можно воспользоваться вариационным принципом. Тогда, выбрав лагранжиан в виде

$$L = \psi^* H \psi + \psi^* R(x, \psi, \psi^*)\,\psi - \frac{i}{2}\,(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) \qquad (11)$$

получим уравнение движения (1), в котором

$$F = R + \psi^* \frac{\partial R}{\partial \psi^*}\,. \qquad (12)$$

Далее, полагая, что H инвариантно относительно всех преобразований систем отсчета, в том числе и временных сдвигов, а R меняется при этом только за счет изменения ψ, мы обычным путем найдем сохраняющиеся величины энергии E и импульса $\mathbf{p}$.

$$E = \langle H + R \rangle, \quad \mathbf{p} = -i \langle \Sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \rangle \qquad (13)$$

(суммирование производится по всем частицам). Так как энергия E должна быть действительна и, кроме того, для сохранения нормы необходима действительность величины F, то из (12) и (13) следует:

$$R^* = R = \rho(x, |\psi|), \qquad F = f(x, |\psi|), \qquad (14)$$

Зависимость R и F от $|\psi|$, но не от ψ и ψ^* порознь, обеспечивает (для нелинейности рассмотренного типа) существование стационарных состояний.

Изложенная выше конструкция нелинейной квантовой механики может быть распространена и на теорию поля с помощью аппарата функционалов Фока. Формулировка квантовой теории поля без принципа суперпозиции будет рассмотрена в более подробной статье.

При подготовке этой статьи автору существенно помогли неоднократные обсуждения с И.Ю.Кобзаревым и Л.Б.Окунем, а также дискуссии с В.Б.Берестецким, М.С.Мариновым, В.В.Судаковым и В.С.Поповым. Полезные замечания были высказаны при обсуждении данной работы в ФИАНе им. П.Н.Лебедева Б.Л.Вороновым, В.Я.Файнбергом, Е.Л.Фейнбергом. Всем перечисленным лицам, а также В.А.Чечину, предоставившему возможность ознакомиться с рукописью его статьи, автор выражает искреннюю признательность.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
6 июля 1972 г.

Литература

[1] A.L.Clark, T.Eliott, H.J. Frisch, H.R.Johnson, L.I.Kerth, W.A.Wenzel. Phys. Rev. Lett., 26, 1661, 1971.

[2] А.Д.Долгов, В.И.Захаров, Л.Б.Окунь. УФН. 107, №4, 1972.

[3] B.Laurent, M.Roos. Phys. Lett., B13, 269, 1964; B15, 104, 1965; Nuovo Cim., 40, 788, 1965.