Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 6, стр. 355 – 358 20 сентября 1972 г.

КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД В ЗАДАЧЕ ДВУХ ЦЕНТРОВ

В. С. Попов

Энергия электрона в поле точечного кулоновского центра Ze равна (для уровня $1s$):

$$\epsilon_0 = \sqrt{1-(Z\alpha)^2}, \qquad (1)$$

где $\hbar = c = m_e = 1$, $\alpha = 1/137$. Это выражение имеет особенность при $Z = 137$. Как заметили Померанчук и Смородинский , учет конечных размеров ядра устраняет кулоновскую особенность, и формула (1) продолжается на $Z > 137$. Значение $Z = Z_c$, при котором уровень $1s$ присоединяется к нижнему континууму, называется критическим зарядом ядра. Квантовая электродинамика приводит к ряду характерных предсказаний в области $Z > Z_c$. Основным эффектом является испускание позитронов "голым" ядром, т. е. ядром с незаполненной K-оболочкой (подробности см. в [2 – 4]). Численно для сферического ядра с радиусом $R \sim 10$ ф $Z_c \approx 170$ (см. [2, 5]), что далеко от области известных в настоящее время тяжелых элементов. По этой причине нужно обратиться к другому способу получения сверхкритических полей, а именно при столкновении двух тяжелых ядер с зарядами Z_1, Z_2 такими, что $Z_1 + Z_2 > Z_c$ (впервые такая возможность обсуждалась в работе [6], см также [4, 7]). При рассмотрении этого эффекта необходимо прежде всего, найти "критическое" расстояние $R_c = R_c(Z_1, Z_2)$ в релятивистской задаче двух центров – т. е. то расстояние R между ядрами, при котором основной уровень квазимолекулы (Z_1, Z_2, e) опускается до границы $\epsilon = -1$. В настоящей статье излагаются результаты таких расчетов. Мы ограничимся простейшим случаем $Z_1 = Z_2 = Z$.

При $Z < 137$ радиус ядра несущественен, так как в кулоновском поле с $Z < 137$ нет "падения на центр". Иными словами, разбиение полного заряда $2Z$ на две части, находящиеся на конечном расстоянии R, уже само по себе достаточно для регуляризации задачи. Кривая уровня $\epsilon_0 = \epsilon_0(Z)$ в задаче двух центров доходит до $\epsilon = -1$, не имея по пути особенностей типа (1). По этой причине будем рассматривать ядра как точечные (радиусы тяжелых ядер $r_0 \sim 8$ф, что много меньше радиуса K орбиты $r_K = (1 + 2\sqrt{1-\zeta^2})/2\zeta \approx 700$ ф для U).

Реально превышение $2Z$ над Z_c невелико (для ядер урана $\delta = (2Z - Z_c)/Z_c = 0{,}08$, для $Cf + Cf$ $\delta = 0{,}15$), поэтому $R_c < \hbar/m_e c = 1$. В области $\delta << 1$ можно получить для R_c простую формулу, если воспользоваться методом сшивания асимптотических разложений. Поясним основную идею на примере бесспиновых частиц.

Из уравнения Клейна—Гордона с $\epsilon = -1$ определяется вид волновой функции ψ_0 на малых и больших расстояниях [7]. Вблизи ядер

$$\psi_0(\xi, \eta) = (\xi^2 - \eta^2)^{-\sigma/2}, \qquad \sigma = 1 - \sqrt{1-\zeta^2}, \qquad (2)$$

в то время как в области r_1, $r_2 >> R$ ядра можно рассматривать как единое целое и потому

$$\psi_o = r^{-1/2} K_{i\nu}(\sqrt{8\zeta r}), \qquad \nu = \sqrt{4\zeta^2 - 1}\ . \tag{3}$$

Здесь $\zeta = 2Z/137$, $K_{i\nu}(x)$ – функция Макдональда, $\xi = (r_1 + r_2)/R$ и $\eta = (r_1 - r_2)/R$ – эллиптические координаты. При условии $R << 1$ имеется промежуточная область $R << r << 1$, в которой $\xi >> 1$, η и асимптотики (2) и (3) сшиваются друг с другом. Можно показать, что в этой области r волновая функция зависит в основном от переменной ξ и притом степенным образом. Приравнивание показателей степени для внутреннего и внешнего решения с энергией $\epsilon = -1$ дает уравнение для критического расстояния между ядрами:

$$R_c = \frac{1}{\zeta} \exp\left\{-\frac{2}{\nu}\left[\operatorname{arc\,ctg}\frac{1-2\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{4\zeta^2-1}} - \arg\Gamma(1+i\nu)\right]\right\} \tag{4}$$

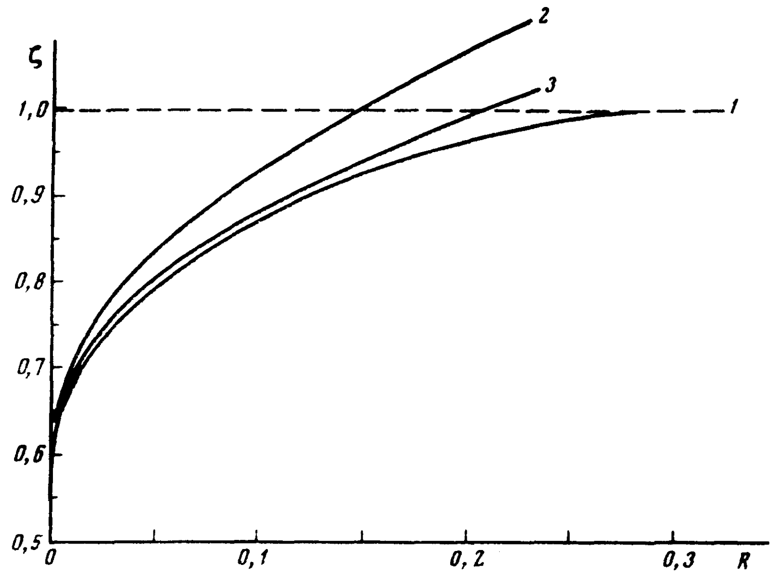

Рис. 1. Критический заряд для скалярных частиц (R в единицах $\hbar/mc$)

(см. кривую 1 на рис. 1). Очевидно, что та же кривая дает критический заряд ζ_c при фиксированном расстоянии между ядрами R. Для сравнения на рис. 1 показаны кривые, полученные из точного решения [2] для ζ_c в случае сферического ядра с радиусом, равным $R/2$ (кривая 2 отвечает поверхностному распределению заряда, кривая 3 – объемному). С помощью вариационного принципа [7] нетрудно строго доказать, что кривая 2 должна идти выше истинной кривой $\zeta_c(R)$ в задаче двух центров. Расположение кривых 1 и 2 удовлетворяет этому требованию. Обращает на себя внимание близость кривых 1 и 3, что означает приблизительную эквивалентность (в смысле Z_c) двух распределений: 1) два точечных центра Z на расстоянии R; 2) сферическое ядро с диаметром R и зарядом $2Z$, равномерно заряженное по объему.

В случае спина $s = 1/2$ вычисления аналогичны, хотя и более громоздки. Приведем ответ:

$$R_c = \frac{1}{\zeta} \exp\left\{- \frac{1}{g}\left[\operatorname{arc\,ctg} \frac{\zeta^2 - 1 - \sqrt{4 - \zeta^2}}{\sqrt{\zeta^2 - 1}\,(1 + \sqrt{4 - \zeta^2})} - \arg\Gamma(1 + 2ig)\right]\right\}, \tag{5}$$

где теперь $g = \sqrt{\zeta^2 - 1}$, $1 < \zeta < 2$. Эта зависимость представлена на рис. 2 (обозначения кривых 1 – 3 имеют тот же смысл, что и на рис. 1). Разумеется, при $R < 20$ ф, когда ядра сливаются, формула (5) уже неприменима. Здесь должно получиться то же значение $\zeta_c = 1{,}25$, что и для одного протяженного ядра. В интересующей нас области значений R зависимость Z_c от R приблизительно линейна (см. пунктирную прямую на рис. 2). Отсюда для ядер урана $R_c \approx 40$ ф, для Cf + Cf $R_c \approx 60$ ф.

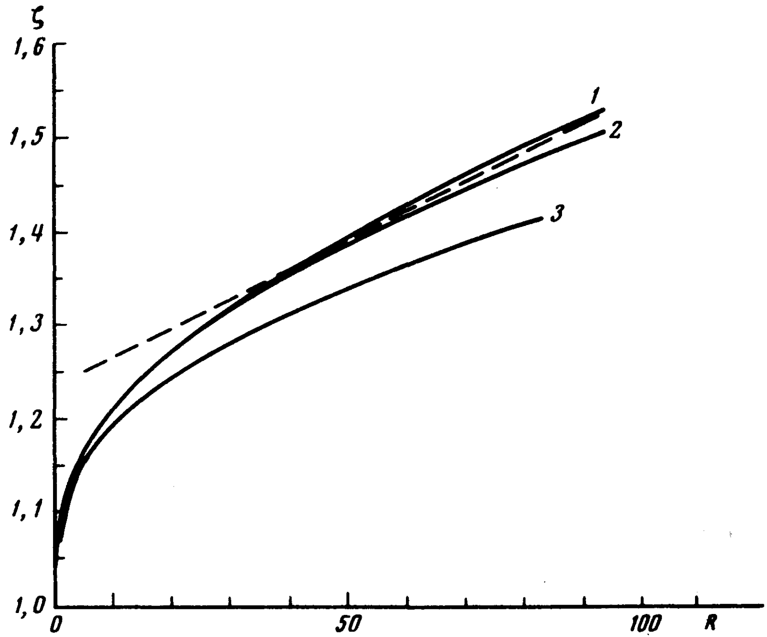

Рис. 2. Критический заряд для электронов (R в ферми)

В заключение скажем несколько слов о точности асимптотик (4), (5). Для проверки их тем же методом были решены две задачи, где известно точное решение: 1) связанный уровень в поле двух δ-потенциалов; 2) критический заряд Z_c для одного протяженного ядра. В обоих случаях получилось вполне удовлетворительное согласие с точным решением. Так, для критического заряда $Z_c = 137\,\zeta_c$ в сферическом ядре с радиусом r_0 получается формула:

$$r_0 = \frac{1}{2\zeta} \exp\left\{-\frac{1}{g}\left[\operatorname{arc\,ctg}\left(-\frac{\xi}{g}\right) - \arg\Gamma(1+2ig)\right]\right\} \quad (6)$$

($\xi = [rG'/G]_{r=r_0}$ логарифмическая производная волновой функции на краю ядра), которая в области $r_0 \sim 10$ ф дает ошибку не более 1%.

Автор искренне благодарен С.С.Герштейну за полезные обсуждения в ходе работы, а также Л.Б.Окуню и А.М.Переломову за обсуждение результатов.

Институт теоретической и экспериментальной физики

Поступила в редакцию 21 июля 1972 г.

Литература

[1] I.Pomeranchuk, Ya. Smorodinsky. J. of Phys. USSR, 9, 97, 1945.

[2] В.С.Попов. ЯФ, 12, 429, 1970.

[3] В.С.Попов. ЖЭТФ, 59, 965, 1970; 60, 1228, 1971.

[4] Я.Б.Зельдович, В.С.Попов. УФН, 105, 403, 1971.

[5] W.Pieper, W.Greiner. Zeits. Phys., 218, 327, 1969.

[6] С.С.Герштейн, Я.Б.Зельдович. ЖЭТФ, 57, 654, 1969; Nuovo Cim. Lett., 1, 835, 1969.

[7] В.С.Попов. ЯФ, 14, 458, 1971.