ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУПП

А.М.Переломов, В.С.Попов

Как известно [I], ортогональной группой $O(n)$ называется группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму $\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2$; аналогично симплектическая группа $Sp(2n)$ состоит из унитарных преобразований, сохраняющих билинейную форму $\sum_{i=1}^{n}(y^i x^{-i} - y^{-i} x^i)$. Простейшие ортогональные группы $O(2)$, $O(3)$ и $O(4)$ имеют многочисленные применения в физике; ортогональные группы более высокого порядка также, как и симплектические группы, используются при классификации состояний в модели ядерных оболочек [2]. При этом часто возникает задача нахождения инвариантных операторов (так называемых операторов Казимира), которые можно построить из генераторов данной группы. Наиболее важным для физики является квадратичный оператор Казимира C_2, собственные значения которого были найдены Рака [2]. Явные выражения для собственных значений операторов C_p с $p > 2$ в литературе отсутствуют (за исключением оператора C_4 для группы $Sp(4)$, см [3]). Ниже приводится решение этой задачи в общем виде.

За единственным исключением (см.ниже (7)), оператор Казимира C_p произвольного порядка p для групп $O(n)$ и $Sp(2n)$ имеет вид:

$$C_p = \sum_{i_1, \dots i_p} X_{i_2}^{i_1} X_{i_3}^{i_2} \dots X_{i_1}^{i_p}, \tag{I}$$

где X_j^i - генераторы рассматриваемой группы. Пусть неприводимое представление задается схемой Юнга $\{f_1, f_2, \dots f_\nu\}$, где f_i - число клеток в i-й строке, $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_\nu \geq 0$. Собственное значение оператора C_p для этого представления обозначим через C_p ($f_1, \cdots f_\nu$). Применяя для его вычисления тот же метод, что и использованный ранее [4] в случае унитарной группы, получаем:

$$C_p (f_1, f_2, \dots f_\nu) = \sum_{i,j} (a^p)_{ij}. \tag{2}$$

Входящая сюда матрица a имеет вид:

$$a_{ij} = (\ell_i + \alpha)\delta_{ij} - \theta_{ij} + \beta \frac{1+\varepsilon_i}{2} \delta_{i,-j}. \tag{3}$$

Здесь $\ell_i = f_i + \tau_i$ (для $i>0$), $\ell_{-i} = -\ell_i$; $\varepsilon_i = +1$ при $i>0$, 0 при $i=0$, - I при $i<0$; θ_{ij} = I при выполнении одного из условий: $0<i<j$, $i<j<0$, $i \geq 0 \geq j$ (кроме $i = j = 0$) и $\theta_{ij}=0$ во всех остальных случаях. Величины α, β, τ_i, а также значения, принимаемые индексами i, j для различных групп, приведены в таблице.

Из (2), (3) получаем явный вид C_p для p = 2,3,4:

$$C_2 = 2S_2, \quad C_3 = (2\alpha - \beta + 1) S_2, \quad C_4 = 2S_4 - (2\alpha\beta + \beta - 1)S_2, \tag{5}$$

справедливые для любой из групп $O(2n+\mathrm{I})$, $O(2n)$ и $Sp(2n)$.

Здесь

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n} (\ell_i^2 - \tau_i^2), \quad S_4 = \sum_{i=1}^{n} (\ell_i^4 - \tau_i^4). \tag{6}$$

Так как $O(2n+\mathrm{I})$, $O(2n)$ и $Sp(2n)$ - группы n- го ранга, в каждой из них имеется n независимых операторов Казимира. Известно [5], что операторы C_p с нечетными p выражаются через C_{2q} с $2q<p$.

Группа		α	β	τ_i	индекс i пробегает значения
обозначения Картана	другие обозначения				
$A_{n-1} \otimes U(1)$	$U(n)$	$\frac{n-1}{2}$	0	$\frac{n+1}{2}-i$	$1,2\ldots,n$
B_n	$O(2n+1)$	$n-\frac{1}{2}$	1	$(n+\frac{1}{2})\varepsilon_i-i$	$1,2\ldots,n,$ $0,-n,$ $\ldots-2,-1$
C_n	$Sp(2n)$	n	-1	$(n+1)\varepsilon_i-i$	$1,2,\ldots,n,$ $-n,\ldots$ $-2,-1$
D_n	$O(2n)$	$n-1$	1	$n\varepsilon_i-i$	$1,2,\ldots,n,$ $-n,\ldots$ $-2,-1$

В случае групп $O(2n+1)$ и $Sp(2n)$ операторы $C_2, C_4 \ldots C_{2n}$ образуют полный набор независимых инвариантных операторов. Особая ситуация возникает для группы $O(2n)$: для того чтобы собственные значения инвариантных операторов однозначно характеризовали неприводимое представление, оператор C_{2n} следует заменить на оператор C_n' :

$$C_n' = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}^{j_1 j_2 \ldots j_n} X_{j_1}^{i_1} X_{j_2}^{i_2} \ldots X_{j_n}^{i_n} , \tag{7}$$

аналогичный псевдоскаляру $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu} M_{\rho\sigma}$ в группе Лоренца. Собственные значения C_n' равны:

$$C_n'(f_1, \ldots f_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 2^n n!\, l_1 l_2 \ldots l_n . \tag{8}$$

В заключение заметим, что не всякое представление групп $O(2n)$ и $O(2n+1)$ может быть описано схемой Юнга (в ортогональной группе есть спинорные представления). Однако все предыдущие формулы справедливы и в этом случае, если понимать под f_i собственное значение диагонального оператора X_i^i для старшего вектора неприводимого представления.

Поступило в редакцию
20 мая 1965 г.

Литература

[1] Г. Вейль. Классические группы, М., Изд.иностр.лит., 1947.

[2] G. Racah. Group theory and spectroscopy. Lecture notes, Princeton, 1951.

[3] M.Micu. Nucl. Phys., 60, 353, 1964.

[4] А.М.Переломов, В.С.Попов. ЖЭТФ, Письма в редакцию, 1, вып.6, 15, 1965; Nucl. Phys (в печати).

[5] B. Gruber, L.O'Raifeartaigh. Math. Phys., 5, 1796, 1964.