О ВОЗМОЖНОМ ОБОБЩЕНИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Э.Б. Глинер

Принцип описания физических сред при помощи некоторого тензора и уравнений, связывающих его с метрикой, реализуемый для сред с тензорами энергии-импульса определенной структуры в общей теории относительности, ниже, в рамках этой последней, имеется в виду распространить на все среды, отличные от неискривленного пространства - времени и характеризуемые тензорными инвариантами.

Введем с этой целью тензор:

I) являющийся рациональной функцией метрического тензора и его первых и вторых производных, линейной относительно вторых производных,

2) удовлетворяющий закону сохранения (обращение в нуль ковариантной дивергенции в силу соотношений, связывающих этот тензор с метрическим),

3) обращающийся в нуль тогда и только тогда, когда пространство - время неискривлено.

Смысл этих требований очевиден. Первые два из них использованы Эйнштейном при отыскании тензора G_{jk}.

С точностью до тривиальных преобразований умножения на число и симметризации, требования I)-3) определяют тензор:

$$\left.\begin{aligned} &G_{jklm} = -R_{jklm} + W_{jklm} - \tfrac{1}{2} g_{jklm} G, \\ &W_{jklm} \overset{def}{=} g_{jm} G_{kl} + g_{kl} G_{jm} - g_{jl} G_{km} - g_{km} G_{jl}, \\ &g_{jklm} \overset{def}{=} g_{jm} g_{kl} - g_{jl} g_{km}, \; G_{jk} \overset{def}{=} R_{jk} - \tfrac{1}{2} g_{jk} R, \; R_{jk} \overset{def}{=} R^{l}_{jkl}, \; G \overset{def}{=} G^{l}_{l}, \end{aligned}\right\} \quad (I)$$

где g_{jk} – метрический тензор, а R_{jklm} – тензор Римана. Ввиду

$$G_{jklm}=-G_{kjlm}=-G_{jkml}=G_{lmjk},\quad G_{jklm}+G_{jlmk}+G_{jmkl}=0 \qquad (2)$$

лишь 20 компонент тензора G_{jklm} независимы, а из

$$G^{j}_{klm|j}=0 \qquad (3)$$

следует обращение в нуль ковариантной дивергенции и по k, l, m.

Тензор G_{jklm}, как оказывается, обладает замечательным свойством (не нарушаемым симметризацией):

$$G^{l}_{jkl}=G^{l}_{jlk}=G_{jk}, \qquad (4)$$

т.е. его свертывание дает тензор Эйнштейна.

Для произвольной среды тензор G_{jklm}, как мы предполагаем, должен играть ту же роль, что тензор G_{jk} в уравнениях Эйнштейна:

$$G_{jk}=-\varkappa T_{jk}. \qquad (5)$$

Это значит, что макроскопическое описание произвольной среды должно осуществляться тензором 4 ранга T_{jklm}, обладающим свойствами симметрии (2) и определяющим метрику в силу соотношений:

$$G_{jklm}=-\varkappa T_{jklm}. \qquad (6)$$

Ввиду (4) их свертывание дает уравнения Эйнштейна (5). Следовательно, тензор энергии-импульса представляет свертку тензора T_{jklm}. Так как (6) – дифференциальные уравнения относительно компонент метрического тензора, то последний зависит не от локальных свойств среды (описываемых T_{jklm}), а от их распределения в пространстве-времени. Поэтому тензор T_{jklm} как и тензор T_{jk} в уравнениях Эйнштейна выражает не локальные свойства метрики, а характеризует отличные от нее объекты.

Ввиду (3) и (5) из (6) следуют соотношения:

$$T^{j}_{klm|j}=0, \qquad (7)$$

определяющие распределение инвариантов тензора T_{jklm} в пространстве-времени, т.е. уравнения движения среды. Лишь 20 из них независимы, так как тензор T_{jklm} удовлетворяет тождествам вида (2).

Остановимся на отдельных частных случаях.

Для сред, элементы объема которых обладают массой покоя, характерно существование в каждой их точке единственной локальной сопутствующей системы отсчета. Это имеет место тогда и только тогда, когда $T_{jk} \stackrel{def}{=} T_{jkl}^{l}$ – тензор, времениподобное собственное значение которого отлично от пространственноподобных. Среды, удовлетворяющие этому условию, можно назвать обычным веществом. Физическая система отсчета всегда подразумевается состоящей из тел, образованных обычным веществом. Поэтому существование и единственность сопутствующей системы отсчета означает однозначную определенность движения обычного вещества относительно обычного вещества.

Условию $T_{jk} \neq 0$, $T_{l}^{l}=0$ удовлетворяет электромагнитное поле.

Наконец, при $T_{jk} = \mu g_{jk}$, где μ – постоянная, среда макроскопически имеет свойства вакуума [4]: любая локальная система отсчета является для нее сопутствующей, так что все взаимодействия между ней и обычным веществом не зависят от скорости последнего (принцип относительности). Эту среду назовем μ-вакуумом. При $\mu = 0$ она представляет обычный вакуум. Соответствующее ей пространство-время представляет пространство Эйнштейна в смысле Петрова [1].

Три указанные среды, различаемые свойствами сверток тензора T_{jklm}, принадлежат трем основным типам сред, предсказываемых общей теорией относительности. Рассмотрим мир из обычного вещества и электромагнитного поля в μ-вакууме. В рамках следствий системы (6) есть единственная возможность описать гравитационные взаимодействия, а именно: как результат определяемого уравнениями движения (7) переноса инвариантов тензора T_{jklm} μ- вакуума. Легко показать, что меняющиеся в пространстве-времени вакуумные инварианты не могут быть истолкованы как компоненты энергии-импульса, так как они не влияют на структуру тензора энергии-импульса μ- вакуума (например при $\mu = 0$ и $T_{jk} = 0$). С этой точки зрения, такие проблемы, как определение плотности энергии гравитационной волны, не могут иметь решение. Можно говорить лишь о потере или приобретении энергии системой из обычного вещества и электромагнитного поля, взаимодействующей с μ - вакуумом. В последнем же законы сохранения и распространения реализуются в иной форме, чем для вещества с $T_{ik} \neq \mu g_{ik}$. Вакуумные инварианты изучены Петровым [1]. В частном случае $\mu = 0$ их перенос изучался Пирани [2] и затем Элерсом и Саксом [3].

Поскольку уравнения Эйнштейна (5) следуют из системы (6), то из последней вытекают и результаты, следующие из уравнений Эйнштейна. Система (6), однако, непосредственно описывает процессы также в средах, имеющих свойства вакуума, и в смешанных средах, в которых вакуумная компонента существенна, тогда как при помощи (5) такие процессы в лучшем случае могут быть описаны только косвенно (например, как следствие задания данных Коши на некоторой пространственноподобной поверхности). Поскольку система (6) к тому же сохраняет характерное для общей теории относительности единство геометрии и физики, нам представляется, что она может рассматриваться как естественное возможное обобщение уравнений Эйнштейна.

Автор искренне признателен А.З.Долгинову и участникам руководимого им семинара за обсуждения работы.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
18 мая 1965 г.

Литература

[1] А.З.Петров. Пространства Эйнштейна. Физматгиз, М., 1961.

[2] F.Pirani. Phys. Rev., 105, 1089, 1957.

[3] Ehlers, Sachs. Z. Phys., 155, 498, 1959.

[4] Э.Б.Глинер. ЖЭТФ, 49, 542, 1965.