О МОНОТОННОСТИ ЗАКОНА РАСПАДА НЕСТАБИЛЬНЫХ ЧАСТИЦ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПОЛЮСУ n-ПОРЯДКА

Л.А.Халфин

В недавней работе [I] было указано на возможность того, что энергетическое распределение нестабильных частиц $\omega(E)$ соответствует не полюсу первого порядка, как это обычно предполагают, а полюсу n-порядка:

$$\omega_n(E) = C_n\left[(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right]^n. \tag{I}$$

Для того, чтобы эти значения ω_n (E) действительно соответствовали энергетическому распределению нестабильной частицы, необходимо, естественно [2], чтобы закон распада такой частицы был монотонным [I)], т.е. чтобы

$$\frac{dL_n(t)}{dt} \leq 0, \qquad t \in [0,\infty), \tag{2}$$

где $L_n(t) = |p_n(t)|^2$ - закон распада нестабильной частицы с энергетическим распределением (I). В [2] дано полное описание всех энергетических распределений ω (E) нестабильных частиц, т.е. всех ω (E), для которых выполнено условие монотонности. Можно, проверив необходимые и достаточные условия, указанные в [2], доказать, что значения ω_n (E) принадлежат к классу энергетических распределений физических систем.

Однако проще это доказать непосредственно. В [I] показано, что [2)]:

$$p_n(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E_0 t - \frac{\Gamma t}{2\hbar}\right\}\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-1}\frac{(n+\ell-1)!(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!} \tag{3}$$

и, следовательно,

$$\frac{dL_n(t)}{dt} = -\frac{\Gamma}{\hbar}\exp\left\{-\frac{\Gamma t}{\hbar}\right\}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-k-1}\frac{(n+k-1)!(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!\,(2n-2)!}\times$$

$$\times\left\{\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-1}\frac{(n+\ell-1)!(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!} - 2\sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-2}\times\right. \tag{4}$$

$$\left.\times\frac{(n-\ell-1)(n+\ell-1)!(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!}\right\}.$$

Поскольку очевидно, что:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-k-1}\frac{(n+k-1)!\,(n-1)!}{(n-k-1)!\,k!\,(2n-2)!}\geq 0, \qquad (5)$$

$$t\in[0,\infty)$$

то для доказательства (2) достаточно показать, что

$$\sum_{\ell=0}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-1}\frac{(n+\ell-1)!\,(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!}\geq$$

$$\geq 2\sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-2}\frac{(n-\ell-1)(n+\ell-1)!\,(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!}. \qquad (6)$$

Для доказательства сделаем в правой части (6) замену $\ell'=\ell+1$ тогда:

$$\sum_{\ell=0}^{n-2}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-2}\frac{(n-\ell-1)(n+\ell-1)!\,(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!}=$$

$$=\sum_{\ell'=1}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell'-1}\frac{\ell'}{n+\ell'-1}\,\frac{(n+\ell'-1)!\,(n-1)!}{(n-\ell'-1)!\,\ell'!\,(2n-2)!}. \qquad (7)$$

Таким образом (6) эквивалентно:

$$\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(2n-2)!}+\sum_{\ell=1}^{n-1}\left(\frac{\Gamma t}{\hbar}\right)^{n-\ell-1}\frac{(n+\ell-1)!\,(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!\,(2n-2)!}\times$$

$$\times\left[1-\frac{2\ell}{n+\ell-1}\right]\geq 0. \qquad (8)$$

Но

$$1-\frac{2\ell}{n+\ell-1}=\frac{n-\ell-1}{n+\ell-1}\geq 0, \qquad (9)$$

так как $\ell=1,2,\dots,n-1$. Следовательно, неравенство (8) справедливо, что и доказывает соотношение (6), а следовательно, и (2).

Таким образом, энергетическое распределение, соответствующее полюсу n-порядка, действительно допустимо при любом n в качестве энергетического распределения нестабильной частицы, поскольку закон распада монотонен.

Выражаю благодарность Н.М.Халфиной за помощь.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
12 июня 1965 г.

Литература

[1] M.L.Goldberger, K.M.Watson. Phys. Rev., 136, B 1472, 1964.

[2] Л.А.Халфин. Квантовая теория распада физических систем. Диссертация, ФИАН, 1960.

---

1) В [1] это условие не упоминается.

2) В (3) выписан только главный член в законе распада.