УНИТАРНАЯ СИММЕТРИЯ И ГРУППА ПУАНКАРЕ

В.И.Фущич

В настоящее время в ряде работ обсуждается вопрос об объединении группы Пуанкаре P с группой внутренних симметрий S (простая группа Ли) [1-5]. При этом прежде всего следует выяснить, не является ли данное объединение тривиальным. Наиболее убедительный результат в этом направлении получен Мишелем [3]. Однако и этот результат получен при довольно жестких ограничениях на группу G, являющуюся объединением групп P и S (предполагается, что каждый элемент $g \in G$ имеет вид $g = sp, \quad s \in S, \quad p \in P$). Но, как это видно из работ [4, 5] и др., при объединении двух групп $G \supset PS$ содержит элементы, которые непредставимы в виде sp. Алгебра Ли такой группы всегда содержит генераторы, которые не принадлежат ни алгебре P, ни S. Поэтому естественно и в этом случае выяснить вопрос о тривиальности или нетривиальности данного объединения.

В этой заметке найдены условия, при которых алгебра, содержащая, кроме генераторов алгебр P и S, добавочные генераторы, является тривиальным объединением P и S.

Пусть генераторами алгебры G являются генераторы алгебр P и S, а также генераторы H'_ℓ и E'_γ, удовлетворяющие условиям:

$$\left[H'_\ell, H'_m\right]_- = 0 \qquad (\ell, m = 1, 2, \ldots, k), \tag{1}$$

$$\left[E'_\gamma, E'_\nu\right]_- \neq 0 \qquad (\gamma, \nu = 1, 2, \ldots, r). \tag{2}$$

Кроме того, будем предполагать, что для произвольного γ можно указать такое ℓ, при котором

$$\left[E'_\gamma, H'_m\right]_- = 0 \quad \text{для} \quad m \neq \ell, \quad \left[E'_\gamma, H'_\ell\right] \neq 0. \tag{3}$$

Генераторы алгебр P и S удовлетворяют условиям:

$$\left[P_\rho, P_\sigma\right]_- = \lambda^\tau_{\rho\sigma} P_\tau \qquad (\tau, \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, 10), \tag{4}$$

$$\left[H_i, H_j\right]_- = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left[H_i, E_\alpha\right]_- = r_i(\alpha) E_\alpha,$$

$$\left[E_\alpha, E_{-\alpha}\right]_- = \sum_i r_i(\alpha) H_i \quad \text{или} \quad \sum_{\substack{\text{по простым} \\ \text{корням}}} \left[E_\alpha, E_{-\alpha}\right] r_i(\alpha) = H_i, \tag{5}$$

$$\left[E_\alpha, E_\beta\right]_- = N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} \qquad (\alpha \neq -\beta),$$

$$\left[H_i, P_\rho\right]_- = 0. \tag{6}$$

Докажем, что $\left[E_\alpha, P_\rho\right] = 0$, т.е. объединение G будет физически тривиальным и никаких массовых формул нельзя получить в одном из следующих трех случаев:

I. $\left[H_j, H'_\ell\right] = A^m_{j\ell} H'_m, \; \left[P_\rho, E'_\gamma\right]_- = B^\nu_{\rho\gamma} E'_\nu, \; \left[E'_\gamma, E_\alpha\right]_- = 0.$ (7)

<u>Доказательство</u>. При указанных допущениях о группе G

$$\left[E_\alpha, P_\rho\right]_- = a^\beta_{\alpha\rho} E_\beta + b^j_{\alpha\rho} H_j + c^\tau_{\alpha\rho} P_\tau + d^\ell_{\alpha\rho} H'_\ell + f^\gamma_{\alpha\rho} E'_\gamma. \tag{8}$$

Поскольку G, по предположению, - группа Ли, то имеет место тождество Якоби

$$J(E_\alpha, P_\rho, H_i) \equiv [[E_\alpha, P_\rho], H_i] + [[P_\rho, H_i], E_\alpha] + [[H_i, E_\alpha], P_\rho] =$$
$$= a^\beta_{\alpha\rho}\left(z_i(\alpha) - z_i(\beta)\right)E_\beta + d^\ell_{\alpha\rho}[H'_\ell, H_i] + f^\gamma_{\alpha\rho}[E'_\gamma, H_i] +$$
$$+ z_i(\alpha)\left(b^j_{\alpha\rho}H_j + c^\tau_{\alpha\rho}P_\tau + d^\ell_{\alpha\rho}H'_\ell + f^\gamma_{\alpha\rho}E'_\gamma\right) = 0. \quad (9)$$

Из (9), с учетом условий (5) и (7), следует, что

$$a^\beta_{\alpha\rho} = \delta^\beta_\alpha a_{\alpha\rho}, \quad b^j_{\alpha\rho} = 0, \quad c^\tau_{\alpha\rho} = 0, \quad f^\gamma_{\alpha\rho} = 0. \quad (10)$$

Далее рассмотрим следующее тождество Якоби:

$$J(E_\alpha, P_\rho, E'_\gamma) = a^\beta_{\alpha\rho}[E_\beta, E'_\gamma] + b^j_{\alpha\rho}[H_j, E'_\gamma] + c^\tau_{\alpha\rho}[P_\rho E'_\gamma] +$$
$$+ d^\ell_{\alpha\rho}[H'_\ell, E'_\gamma] + f^\nu_{\alpha\rho}[E'_\nu, E'_\gamma] = 0. \quad (11)$$

Учитывая (3) и (10), из (11) следует, что

$$d^\ell_{\alpha\rho} = 0. \quad (12)$$

Для доказательства того, что $a_{\alpha\rho} = 0$, достаточно использовать тождество Якоби

$$J(P_\rho, P_\sigma, E_\alpha) \equiv 0 \quad (13)$$

и свойства структурных констант $\lambda^\tau_{\rho\sigma}$ (см. [1]).

2. $$[E'_\gamma, H_i]_- = D^\nu_{\gamma i}E'_\nu, \quad [P_\rho H'_\ell]_- = C^m_{\rho\ell}H'_m,$$
$$[H'_\ell, E_\alpha] = 0. \quad (14)$$

3. Если в G существует хоть один генератор H'_ℓ, который коммутирует с генераторами P и S, то и в этом случае $[E_\alpha, P_\rho] = 0$.

Для доказательства этих утверждений нужно вместо тождества (11) использовать тождество

$$J(E_\alpha, P_\rho, H'_\ell) \equiv 0. \quad (15)$$

В заключение отметим, что если условие (6) выполняется не для всех i то, как это показано в [2], можно построить нетривиальное объединение G, генераторами которого будут только P_ρ, H_i и E_α.

Поступило в редакцию
3 июня 1965 г

Литература

[1] F.Coester, M.Hamermesh, McGlinn. Phys.Rev., 135, B450, 1964.

[2] U. Ottson, A. Kihlberg, J.Nilsson. Preprint, Gothenburg, 1964.

[3] L.Michel. Phys. Rev., 137, B405, 1965.

[4] F. Gürsey, A.Pais, L.Radicati. Phys.Rev. Lett., 13, 239, 1964.

[5] В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров. Препринт ОИЯИ, Д-1929, 1964.