СИММЕТРИЯ АТОМА ВОДОРОДА

И.А.Малкин, В.И.Манько

В настоящее время, в связи с успехом группового подхода в физике элементарных частиц, вопросы, связанные с симметрией волновых уравнений, привлекают большое внимание.

В работах Фока[1] и Баргмана[2] было показано, что в кулоновом потенциале волновые функции, принадлежащие одному уровню, реализуют конечномерное представление компактной группы O_4, которая считалась группой симметрии данной задачи.

В недавней работе Барута и др.[3] показано, что состояния дискретного спектра атома водорода образуют базис бесконечномерного представления алгебры де Ситтера (4 + I). Как показано Томасом[4], базис бесконечномерного представления группы де Ситтера S образуют матричные элементы представлений компактной группы O_4 , содержащейся в ней.

Цель настоящей работы - показать, что "группой симметрии" атома водорода является некомпактная группа O_6 , алгебра Ли которой есть алгебра D_3 , и дать простую конструкцию, показывающую, что функции, принадлежащие дискретному спектру, образуют одно бесконечномерное неприводимое представление этой алгебры.

Пусть $\varphi(x_1 \cdots x_n)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{A}\varphi = 0, \tag{I}$$

где $\hat{A}$ - линейный дифференциальный оператор. Будем называть группой симметрии уравнения (I) совокупность операторов $\hat{M}_\alpha$, образующих замкнутую относительно коммутации алгебру и удовлетворяющих условию

$$[\hat{A}\hat{M}_\alpha]\varphi = 0. \tag{2}$$

Если φ есть решение, то $\hat{M}_\alpha \varphi$ тоже решение.

Как было доказано Фоком[1], собственные функции дискретного спектра атома водорода в импульсном представлении и переменных $\zeta_i \ (i = 1, \dots 4)$

$$\vec{\zeta} = \frac{2p_0}{p_0^2 + p^2}\,\vec{p}, \qquad \zeta_4 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}$$

являются однородными гармоническими полиномами переменных ζ_i, степени $N-1$ (N - главное квантовое число), т.е. решениями уравнения

$$\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_2^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_3^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_4^2} = 0. \qquad (3)$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что I5 операторов

$$\begin{aligned} M_{ik} &= -i\left(\xi_i \frac{\partial}{\partial\xi_k} - \xi_k \frac{\partial}{\partial\xi_i}\right), \\ I_i &= \xi_k^2 \frac{\partial}{\partial\xi_i} - 2\xi_i\xi_k \frac{\partial}{\partial\xi_k} - 2\xi_i, \\ P_i &= -i\frac{\partial}{\partial\xi_i}, \\ I &= \xi_k \frac{\partial}{\partial\xi_k} + 1 \end{aligned} \qquad (4)$$

коммутируют на решениях уравнения (3) с четырехмерным лапласианом $\Delta\varphi$.

Конструкция операторов (4) подсказана авторам аналогией уравнения (3) с уравнением Клейна - Гордона для частицы с массой 0 [5,6].

Введем следующие операторы: $L_{ik} = -L_{ki}$ $(ik = 1,\dots 6)$,

$$\begin{aligned} &L_{ik} = M_{ik} \quad (i,k = 1,\dots 4), && L_{i5} = \frac{1}{2}(I_i + iP_i), \\ &L_{56} = -I, && L_{i6} = \frac{1}{2}(P_i + iI_i), \end{aligned} \qquad (5)$$

которые удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям алгебры D_3

$$[L_{ik}L_{em}] = i(\delta_{ie}L_{km} + \delta_{km}L_{ie} - \delta_{im}L_{ke} - \delta_{ke}L_{im}. \qquad (6)$$

Написанная некомпактная группа является группой симметрии атома водорода в смысле (I) и (2). Собственные функции атома водорода, отвечающие главному квантовому числу $N = n+1$, могут быть реализованы как неприводимые тензорные степени $\Pi^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ вектора ξ_i $(\xi_i^2 = 1)$, причем $\Pi^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ –полностью симметричный тензор и $\delta_{i_1 i_2} \cdot \Pi^n_{i_1 i_2 \dots i_n} = 0$. Приведем сводку матричных элементов операторов (4) в этом базисе.

$$I_i \Pi^n_{i_1 \dots i_n} = \delta_{i\, i_{n+1}} \Pi^{n+1}_{i_1 \dots i_n i_{n+1}}, \qquad (7a)$$

$$P_i \Pi^n_{i_1\dots i_n} = i\Big[2n\sum_{k=1}^{n}\delta_{i i_k}\Pi^{n-1}_{i_1\dots i_{k-1} i_{k+1}\dots i_n} -$$

$$-2\sum_{(j,k)}\delta_{i_j i_k}\ \Pi^{n-1}_{i_1\dots i_{k-1} i_{k+1}\dots i_{j-1} i_{j+1}\dots i_n}\Big], \quad (7б)$$

$$M_{ij}\Pi^n_{i_1\dots i_n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{i i_k}\Pi^n_{i_1\dots i_{k-1} i_{k+1}\dots i_n j} - \delta_{j i_k}\Pi^n_{i_1\dots i_{k-1} i_{k+1}\dots i_n i}\right), \quad (7в)$$

$$I\Pi^n_{i_1\dots i_n} = (n+1)\,\Pi^n_{i_1\dots i_n}. \quad (7г)$$

В соотношении (7б) (j,k) означает суммирование по сочетаниям из n индексов по два.

Тензоры $\Pi^n_{i_1 i_2 \dots i_n}$ нормированы условием (7а) и $\Pi^0 = I$. Операторы I_i переводят уровень N в $N+1$, а P_i - в $N-1$; это означает, что из любого состояния мы последовательно получаем всю совокупность состояний. Т.е. в пространстве $H = \mathcal{E} \oplus \Pi^n$, где H - прямая сумма пространств функций, отвечающих данному, построено бесконечномерное представление алгебры операторов (5). Оно - неприводимо, так как если бы существовало инвариантное подпространство, то в нем содержалась хотя бы одна тензорная степень Π^n, действуя на которую операторами I_i и P_i, мы получили бы все тензорные степени, т.е. ненулевое инвариантное подпространство совпадало бы со всем пространством H. Приведем значения операторов Казимира для этого представления.

$$C_2 = L_{ik}L_{ki} \equiv 6, \qquad C_3 = \varepsilon_{ikemnp}L_{ik}L_{em}L_{pn} = 0,$$

$$C_4 = L_{ik}L_{km}L_{mn}L_{ni} = -12.$$

Алгебра де Ситтера S является подалгеброй D_3, именно $S_{ij} = L_{ij}$ $(i,j = 1,\dots 5)$. Замечательно, что построенное выше представление остается неприводимым и относительно подалгебры S, в чем можно убедиться, действуя операторами L_{i5} на 1. Кроме того, оператор Казимира для алгебры де Ситтера

$$\hat{Q} = S_{ij}S_{ji} = 4 - \frac{1}{2}(\zeta_i^2+1)^2\frac{\partial^2}{\partial \zeta_k^2}.$$

Отсюда видно, что

$$\hat{Q}\,\Pi^n_{i_1\dots i_n} = 4\Pi^n_{i_1\dots i_n}.$$

Второй оператор Казимира алгебры S равен нулю. Этим полностью доказано, что представление остается неприводимым при сужении с D_3 на алгебру де Ситтера. Отметим, что алгебра D_3 содержит подалгебру с коммутационными соотношениями алгебры A_2 и поэтому уровни атома водорода можно также классифицировать с помощью неприводимых представлений этой алгебры.

Авторы глубоко благодарны А.М.Балдину, В.Б.Берестецкому, А.А.Комару, А.М.Переломову, В.С.Попову и И.С.Шапиро за обсуждение результатов работы, а также М.А.Наймарку за полезные советы и консультации.

Московский
физико-технический институт

Поступило в редакцию
8 июля 1965 г.

Литература

[1] V.Fock, Zs. Phys., 98, 145, 1935.
[2] V.Bargmann. Zs. Phys, 99, 576, 1936.
[3] A.O.Barut, P. Budini, C. Fronsdal. Preprint TRIEST, IC/65/34.
[4] L.H. Thomas. Ann. of Math., 42, 113, 1960.
[5] P.A.M. Dirac. Ann.of Math., 37, 429, 1936.
[6] В.И. Огиевецкий, И.В.Полубаринов. ЖЭТФ, 37, 470, 1959.

К ВОПРОСУ О "ВТОРОМ ЗВУКЕ" В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

А.А.Чабан

Сообщение [1] о наблюдении дополнительного ультразвукового сигнала при усилении дрейфом носителей поперечных колебаний с частотой 10^7 гц в кристалле CdS вызвало большой интерес.

Аномальный сигнал проходил через кристалл со скоростью, в 1,3-1,6 раза меньшей скорости обычного сигнала. Это дало возможность предположить, что удалось обнаружить коллективную волну фононов, аналогичную "второму звуку" в гелии [1-3]. Однако простейшие оценки показывают, что при комнатной температуре и использованных в [1] проводимостях затухание из-за ангармоничности решетки для упругих колебаний с частотами порядка 10^{10}–10^{11} гц, усиление которых по [1-3] может привести к существованию "второго звука", гораздо больше их усиления дрейфом носителей. Это обстоятельство уже отмечалось в [4].

В настоящей заметке будет показано, что появление аномального сигнала может быть понято как некоторый дифракционный эффект, вызываемый анизотропией коэффициента усиления. По своей природе это явление имеет сходство с двойным лучепреломлением, где также существует волна с аномально низкой скоростью распространения фронта; однако в данном случае существенна анизотропия не действительной, а мнимой части волнового числа.

Пусть в среде, занимающей полупространство $z>0$, изотропной по упругим свойствам, электроны движутся вдоль оси z с дрейфовой скоростью v. Плоская ультразвуковая волна, распространяющаяся в среде в направлении, составляющем угол θ с осью z, будет нарастать [5,6] при $v\cos\theta > s$, где s – скорость звука, причем коэффициент усиления будет зависеть от угла θ. Ограничиваясь в дальнейшем для простоты продольной волной, исследуем излучение в данную среду бесконечной пластины $z=0$, колеблющейся с частотой ω. Каждую точку на плоскости $z=0$ можно рассматривать как источник сферических волн, усиливаемых по мере распространения с разным коэффициентом усиления в разных направлениях. Смещения, вызываемые в точке приема на расстоянии z от излучающей плоскости элементами кольца, видимого из точки приема под углом θ, равны

$$du = A\cos\theta z^{-1} \exp\left[i\left(\omega t - \frac{kz}{\cos\theta}\right) + \frac{\alpha(\theta) z}{\cos\theta}\right]\cdot dS,$$

где A – постоянная, α – коэффициент усиления,

$$k = \frac{\omega}{s}; \quad dS = 2\pi z\, tg\,\theta\, d(z\, tg\,\theta).$$

Интегрируя по θ и вводя обозначение $p = 1/\cos\theta$, получим

$$U(z) = 2\pi A\int_1^\infty z\exp[i(\omega t - kzp) + \alpha(p) zp]\, dp. \qquad (1)$$

Зная зависимость α от p, можем найти поле (1).

Конкретный расчет произведем для простейшего случая кубического кристалла, считая, что усиление происходит за счет потенциала деформаций [7]. Предположим, что существенную роль играют ловушки с $\omega\tau < 1$, где τ – время релаксации электронов проводимости по отношению к ловушкам (последнее неравенство, по-видимому, имело место в [1]:см. [8,9]). Тогда из [8-10] легко получить, что $\alpha(\theta) \approx \alpha_0 = const$ при $\theta < \theta_0$ и $\alpha(\theta) \le 0$ при $\theta < \theta_0$. в В этом случае находим приближенно

$$U(z) = D\left\{\exp\left[i(\omega t - kz) + \alpha_0 z\right] - \exp\left[i\left(\omega t - \frac{kz}{\cos\theta_0}\right) + \frac{\alpha_0 z}{\cos\theta_0}\right]\right\}, \qquad (2)$$

где D – постоянная. Таким образом в среде распространяются сразу две упругих волны со скоростями s и $s\cos\theta_0$ соответственно; вторая волна и создает аномальный сигнал. Различие скоростей связано с тем, что перенос энергии, происходящий со скоростью звука, в аномальной волне происходит под углом θ_0 к направлению фронта. Из (2) видно, что при сделанных предположениях аномальная волна может иметь гораздо бо́льшую амплитуду, чем обычная волна. Это делает особенно интересной и желательной постановку эксперимента с кубическими кристаллами, где предположения теории хорошо выполняются. В случае пьезоэлектрических кристаллов учет анизотропии упругих и особенно пьезоэлектрических свойств, разумеется, совершенно необходим для количественных выводов.

Скорость аномальной волны, обнаруженной в [1] экспериментально, качественно согласуется с теорией, изложенной выше. К сожалению, характер зависимости этой скорости от скорости дрейфа носителей в этой работе не обсуждается. Отметим, что условие наблюдения двух неперекрывающихся (обычного и аномального) импульсов имеет вид

$$\Delta t < \frac{L}{s}\left(\frac{1}{\cos\theta_0} - 1\right), \qquad (3)$$

где L - длина кристалла, а Δt - длительность импульса.

Рассмотренному явлению можно дать весьма наглядную интерпретацию. Если считать, что из-за характера усиления практически все излучение точечного источника в среде сосредоточено в конусе с углом θ_0, то в каждой точке при $z > 0$ будет приниматься излучение лишь от диска, ось которого проходит через точку наблюдения и который виден из последней под углом θ_0, то есть как бы излучение, проходящее через круглое отверстие в непрозрачном экране при нормальном падении плоской волны. Соответственно, при выполнении условия (3), в точке приема должны наблюдаться два сигнала: прямой сигнал, прошедший через отверстие, и сигнал, дифрагированный на краю отверстия. Соответственный расчет для случая импульсного излучения диска имеется в [11].

В заключение отметим, что совершенно аналогичное явление прихода двух сигналов будет иметь место и при соответственной анизотропии коэффициента затухания, в отсутствие усиления. Таким образом устанавливается факт наличия двух волн: обычной и аномальной для случая анизотропии мнимой части волнового числа как в случае усиления волн, так и в случае их ослабления.

Следует ожидать аналогичных явлений и при распространении волн любого типа в случае анизотропии тех свойств среды, которые определяют распространение волн этого типа.

Автор благодарен Ю.Л.Газаряну, М.А.Исаковичу и И.А.Урусовскому за ценные советы и обсуждение результатов.

Акустический институт
г. Москва

Поступило в редакцию
15 июня 1965 г.

Литература

[1] H. Kroger, E.W.Prohofsky, R.W.Damon. Phys.Rev.Lett.,11,246, 1963.

[2] R.W.Damon, H.Kroger, E.W.Prohofsky. Proc. IEEE,52, 912, 1964.

[3] E.W.Prohofsky. Phys.Rev., 134A, 1302, 1964.

[4] E.Conwell. Phys. Lett., 13,285, 1964.

[5] A.R. Hutson, J.H. McFee, D.L. White. Phys. Rev. Lett., 7, 237, 1961.

[6] D.L. White. J.Appl. Phys., 33, 2547, 1962.

[7] H.N. Spector. Phys. Rev., 127, 1084, 1962.

[8] I.Uchida, T. Ishiguro, Y.Sasaki, T. Suzuki. J.Phys.Soc. Japan, 19, 674, 1964.

[9] T. Ishiguro, I. Uchida, T. Suzuki. IEEE Intern. Conv. Record, part 2, 93, 1964.

[10] J. Von Mertsching, Phys. Stat, Sol., 4, 453, 1964.

[11] Г.С. Львов. Дипломная работа,МФТИ, 1961 .