К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФАЗИРОВАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Дж.Роулэндс*, В.Б.Красовицкий**, В.И.Курилко**

Как известно, пучок осцилляторов, образованный частицами плазмы, которые вращаются вокруг магнитного поля, оказывается неустойчивым относительно возбуждения колебаний, если функция распределения не зависит от фазы в пространстве скоростей (в случае несфазированных осцилляторов). Представляет интерес исследовать задачу об устойчивости системы сфазированных осцилляторов, т.е. таких осцилляторов, фаза которых в пространстве скоростей фиксирована. Такая система может быть получена, например, в случае, когда поперечная электромагнитная волна распространяется в плазме вдоль магнитного поля. В этом случае задачи об исследовании устойчивости системы сфазированных осцилляторов и волны, распространяющейся в плазме вдоль магнитного поля, полностью идентичны.

Ниже мы рассмотрим эту задачу в гидродинамическом приближении.

Исходная система уравнений состоит из гидродинамических уравнений для частиц плазмы и уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
& m\frac{d\vec{v}}{dt} = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{v},\vec{H}]\right),\\
& \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} e n \vec{v},\\
& \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t},\\
& \frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\,(n\vec{v}) = 0.
\end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

---

*UKAEA, Culham lab. Culham, Abingdon, Berks.

**ФТИ АН УССР, Харьков.

Будем искать решения этой системы в следующем виде:

$$v_x + i v_y = a(t)\exp[-i\Phi + i\varphi(t)],$$

$$E_x + iE_y = i\mathcal{E}(t)\exp[-i\Phi + i\Psi(t)],$$

$$H_y - iH_x = i\mathcal{H}(t)\exp[-i\Phi + i\varkappa(t)], \qquad (2)$$

$$v_z = v_z(t), \quad E_z = E_z(t), \quad H_z = H_0 = const,$$

$$\Phi \equiv kz - \omega t.$$

В равновесном состоянии $v_{z0} = E_{z0} = 0$, $\varkappa_0 = \varphi_0 = \Psi_0 = const$. При этом амплитуды скорости и полей постоянны и связаны соотношениями

$$\mathcal{E}_0 = \frac{\omega}{kc}\mathcal{H}_0,$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\omega}{kc}\mathcal{E}_0 + \frac{4\pi}{kc} e n_0 a_0, \qquad (3а)$$

$$m a_0(\omega_H - \omega) = e\mathcal{E}_0,$$

а волновое число k определяется дисперсионным уравнением:

$$k^2c^2 = \omega^2 + \omega_p^2 \frac{\omega}{\omega_H - \omega}. \qquad (3б)$$

Рассматривая малые возмущения стационарного состояния, описываемого формулами (3)

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1(t), \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1(t), \quad a(t) = a_0 + a_1(t),$$

$$\varkappa(t) = \varkappa_0 + \varkappa_1(t), \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \varphi_1(t), \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1(t),$$

и предполагая, что все возмущения пропорциональны $\exp(\lambda t)$, получим следующее уравнение для λ:

$$\lambda^4 + \lambda^2\left\{\mu^2\omega_H\Delta + \Delta^2 + 2\omega_p^2\frac{\omega_H}{\Delta} + 4\omega^2\right\} +$$

$$+\left\{4\omega^2\omega_H\Delta\mu^2 + \omega_p^2\omega_H^2\mu^2 + 4\omega_H\omega\omega_p^2 + 4\omega^2\Delta^2 + \omega_p^4\frac{\omega_H^2}{\Delta^2}\right\} = 0, \qquad (4)$$

где $\Delta \equiv \omega_H - \omega$, $\Omega_0 \equiv \frac{e\mathcal{H}_0}{mc}$, $\mu^2 = \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\lambda^2}\right)^{-1}$.

Качественное исследование этого уравнения показывает, что при достаточно большой амплитуде поля всегда существуют решения его, соответствующие неустойчивости. Для количественной оценки инкрементов нарастания и условий неустойчивости рассмотрим простейшие предельные случаи.

1. Малая плотность плазмы (сильные магнитные поля). Этот случай более соответствует задаче устойчивости частицы при ускорении ее внешним полем.

При этом возможны два предельных случая:

а) $\omega_p \ll |\Delta| \ll \omega_H$.

В этом случае $\lambda^2 = -\Delta^2 - \omega_H \Delta \mu_0^2, \quad \mu_0^2 \equiv \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2}$.

б) $\frac{\omega_p}{\omega_H} \sim \frac{|\Delta|}{\omega_H} \sim \frac{\Omega_0^2}{\omega_H^2} \ll 1$,

$$\lambda^2 = -\Omega_0^2 \frac{\omega_H}{\Delta} + \frac{\omega_p^2 \, \omega_H^2}{4\omega^2 - \Omega_0^2 \frac{\omega_H}{\Delta}} \, \frac{\Omega_0^2}{\Delta^2}. \qquad (5)$$

Таким образом, неустойчивость может существовать только в области быстрых волн ($\omega > \omega_H$), причем с ростом амплитуды волны ширина области неустойчивости (по частотам), а также инкремент неустойчивости возрастают. Можно показать, что результат пункта а может быть получен из рассмотрения задачи об устойчивости движения одной частицы во внешнем поле.

С ростом плотности плазмы в этой области, согласно пункту б, инкремент неустойчивости уменьшается.

2. Большая плотность плазмы (слабые магнитные поля). При

$$\frac{\omega_H}{\omega_p} \sim \frac{k^2c^2}{\omega_p^2} \sim \frac{\Omega_0^2}{\omega_p^2} \sim \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{1/2} \ll 1 \qquad (6)$$

решение уравнения (4) имеет вид

$$\lambda^2 = -\omega_p^2 \left\{1 + \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \frac{\omega_H \, \Omega_0^2}{\omega_p^3}}\right\}; \quad \delta \equiv \frac{k^2c^2 + \omega_H \, \omega_p}{\omega_p^2}.$$

Таким образом, и в этом случае ($\Delta > 0$) неустойчивость имеет пороговый характер [1]).

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда длина волны возмущения для продольного поля и скорости конечна. В последнем случае условия неустойчивости и инкременты, полученные выше, изменяются, и, кроме того, повышается порядок уравнения (4), что может привести к новым неустойчивостям, аналогичным, например, рассмотренным в [1].

Необходимо отметить, что впервые задача об устойчивости непрямолинейных пучков заряженных частиц, которые также представляют собой пучки возбужденных осцилляторов, была рассмотрена в работах [2]. В отличие от условий, рассмотренных в этих работах, амплитуда осциллятора в нашей задаче однозначно определяется амплитудой волны. Поэтому неустойчивость в нашем случае остается даже при плотности плазмы, равной нулю (как было отмечено выше, она соответствует неустойчивости движения частицы во внешнем поле), тогда как в [2] инкремент обращается в нуль при плотности пучка, равной нулю.

Авторы выражают благодарность Я.Б.Файнбергу за обсуждение результатов работы.

Один из авторов (Р.Дж.) благодарит ГКИАЭ СССР, а также директора ФТИ АН УССР за гостеприимство.

Поступило в редакцию
I9 октября I965 г.

Литература

[I]. Т.Ф.Волков. ЖТФ, 3I, II49, I96I.

[2] А.В.Гапонов. Известия вузов. Радиофизика, 2, 450, I959.

I) В этом случае неустойчивость носит распадный характер [3].