НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, ПРОХОДЯЩЕГО ЧЕРЕЗ ПЛАЗМУ

В.Н.Цытович, А.Б.Шварцбург

Ниже будет показано, что эффекты нелинейного взаимодействия волн могут существенно изменить поляризацию излучения, проходящего через плазму, при достаточно большой интенсивности излучения или достаточно большом его пути в плазме. Результаты настоящей работы могут иметь приложения при исследовании поляризационных свойств космического излучения [I], распространения радиоволн и т.п.

Считая нелинейные эффекты слабыми, можно раскладывать ток, создаваемый волной в плазме, по амплитуде волны. Так как квадратичный по амплитуде полей ток, как известно, описывает [2] лишь взаимодействие поперечных и продольных волн I), то нас будет интересовать ток $\vec{j}^{(3)}$, содержащий амплитуды волн в третьей степени. Уравнение распространения волны приобретает вид

$$\left(K^2-\omega^2\varepsilon^{t_2}\right)\vec{E}_{\vec{K}\omega}=\frac{e^2\omega_{0e}^2\,\omega}{2m_e^2}\int d\lambda\,\frac{(\vec{K}_2+\vec{K}_3)^2}{(\omega_2+\omega_3)^2}\,\vec{E}_{\vec{K}_1\omega_1}\left(\vec{E}_{\vec{K}_2\omega_2}\,\vec{E}_{\vec{K}_3\omega_3}\right). \quad (I)$$

Здесь $\omega_{0e}^2=4\pi e^2N/m_e$, $\vec{E}_{\vec{K}\omega}$ – компоненты Фурье поля волн, ε – линейная диэлектрическая проницаемость плазмы; $d\lambda=dK_1dK_2dK_3\times$ $\times\delta(K-K_1-K_2-K_3)$; $K=\{\vec{K}\omega\}$. Поскольку нелинейность является слабой, решение (I) можно искать методом Боголюбова и Ван-дер-Поля [4] (см. также [5,7]), предполагая, что

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\int\vec{E}_{\vec{K}}(\vec{r},t)e^{i(\vec{K}\vec{r}-\omega(\vec{K})t)}d\vec{K};\ \vec{E}_{\vec{K}}=\vec{E}^{*}_{-\vec{K}};\ \omega(\vec{K})=-\omega(-\vec{K}),$$

где $\omega(\vec{K})$ - есть решение линейного дисперсионного уравнения, а $\vec{E}_{\vec{K}}(\vec{r},t)$ - амплитуда, медленно меняющаяся по времени и координатам (в сравнении с $1/\omega$ и $1/|\vec{K}|$). Оставляя лишь первые производные от нее в левой части (I) и пренебрегая изменениями $\vec{E}_{\vec{K}}(\vec{r},t)$ с $\vec{r}$ и t в правой, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_{гр}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)\vec{E}_{\vec{K}}(\vec{r},t)=\frac{1}{i}\frac{e^2\omega_{oe}^2}{\left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon^t\right|}\frac{1}{2m_e^2}\times$$

$$\times\int\frac{d\vec{K}_1 d\vec{K}_2 d\vec{K}_3}{\omega(\vec{K}_1)\omega(\vec{K}_2)\omega(\vec{K}_3)}e^{it[\omega(\vec{K})-\omega(\vec{K}_1)-\omega(\vec{K}_2)-\omega(\vec{K}_3)]}\times$$

$$\times\delta(\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2-\vec{K}_3)[\omega(\vec{K}_1)+\omega(\vec{K}_2)+\omega(\vec{K}_3)]\frac{(\vec{K}_2+\vec{K}_3)^2\vec{E}_{\vec{K}_1}(\vec{r},t)}{[\omega(\vec{K}_2)+\omega(\vec{K}_3)]^2}\times$$

$$\times\left(\vec{E}_{\vec{K}_2}(\vec{r},t)\,\vec{E}_{\vec{K}_3}(\vec{r},t)\right). \qquad (2)$$

Здесь $\vec{v}_{гр}=(\vec{K}/K)(d\omega/dK)$ - групповая скорость волн в линейном приближении (линейным затуханием волн пренебрегается).

2. Рассмотрим взаимодействие между различными компонентами поляризации одной и той же монохроматической волны $\omega \gg \omega_{oe}$

$$\vec{E}_{\vec{K}}=\vec{E}\delta(\vec{K}-\vec{K}_0)+\vec{E}^*\delta(\vec{K}+\vec{K}_0),$$

где $\vec{K}_0$ - волновой вектор монохроматической волны. Оставляя лишь члены, удовлетворяющие условию фазового синхронизма $\omega(\vec{K})-\omega(\vec{K}_1)-\omega(\vec{K}_2)-\omega(\vec{K}_3)=0$, получим

$$\frac{d\vec{E}}{dt}=i\beta\vec{E}^*(\vec{E}^2); \qquad \beta=\frac{e^2\omega_{oe}^2}{4m_e^2\omega^3}. \qquad (3)$$

Записывая в комплексной форме компоненты поляризации E_I и E_2 (проекции $\vec{E}$ на два направления, перпендикулярные $\vec{K}_0$): $E_1=A_1e^{i\varphi_1}$; $E_2=A_2e^{i\varphi_2}$, получаем уравнения для A_IA_2 и $\varphi=\varphi_1-\varphi_2$:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}=-\beta A_1A_2^2\sin 2\varphi;\quad \frac{\partial A_2}{\partial t}=\beta A_2A_1^2\sin 2\varphi;$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\beta(A_1^2-A_2^2)(1-\cos 2\varphi). \qquad (4)$$

Система (4) имеет два интеграла-сохранения энергии $A_1^2 + A_2^2 = A_1^2(0) + A_2^2(0)$ и сохранения момента количества движения [7] $A_1^2 A_2^2 \sin^2\varphi = A_1^2(0) A_2^2(0) \sin^2\varphi_0$, позволяющие найти решение. Наиболее простой вид имеет результат, если за направления I,2 взять направление главных осей эллипса поляризации при $t = 0$, т.е. $\varphi_0 = \pm\pi/2$ [2)]

$$A_1^2 = A_1^2(0)\cos^2\tau + A_2^2(0)\sin^2\tau; \quad A_2^2 = A_1^2(0)\sin^2\tau + A_2^2(0)\cos^2\tau, \tag{5}$$

$$\tau = 2\rho t A_1(0) A_2(0). \tag{6}$$

В этом случае через время $\tau = \pi/2$ энергия будет уже в основном "перекачана" в компоненту A_2. Величина двух полуосей $b_{1,2}$ эллипса поляризации в каждый момент времени может быть записана через инварианты

$$b_{1,2}(t) = 1/2\left(\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\sin\varphi} \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\sin\varphi}\right) = b_{1,2}(0),$$

т.е. форма эллипса не меняется и он испытывает лишь поворот.

Легко получить, что угол θ между большой полуосью и ее направлением при $t = 0$ линейно растет во времени $tg 2\theta = \pm tg 2\tau$. Знак минус соответствует случаю $\varphi_0 = \pi/2$, а плюс $\varphi_0 = -\pi/2$, т.е. нелинейное вращение эллипса имеет направление, противоположное направлению вращения электрического вектора по эллипсу. Характерное время поворота зависит от произведения начальных плотностей энергий W_1 и W_2 по главным осям и имеет оценку

$$t \simeq \frac{1}{2\rho A_1(0) A_2(0)} = \frac{2}{\omega_{oe}} \left(\frac{\omega}{\omega_{oe}}\right)^3 \frac{n m_e c^2}{\sqrt{W_1 W_2}}. \tag{7}$$

Можно показать также, что при взаимодействии двух волн различных частот сумма энергий двух компонент каждой из поляризаций сохраняется, т.е. рассматриваемое взаимодействие (3) изменяет лишь поляризацию волн.

3. Если взаимодействующие волны являются случайными, то из (3) нетрудно получить уравнения для средних значений компонент поляризаций $E_{1\vec{k}}$ и $E_{2\vec{k}}$ [3)]:

$$\langle E_{1\vec{k}} E_{2\vec{k}} \rangle = |E_{1\vec{k}}|^2 \delta(\vec{k}+\vec{k}') = A_{1\vec{k}} \delta(\vec{k}+\vec{k}'),$$

$$\langle E_{2\vec{k}} E_{2\vec{k}'} \rangle = |E_{2\vec{k}}|^2 \delta(\vec{k}+\vec{k}') = A_{2\vec{k}} \delta(\vec{k}+\vec{k}');$$

$$\langle E_{1\vec{k}} E_{2\vec{k}'} \rangle = \langle E_{1\vec{k}} E^{x}_{2\vec{k}} \rangle \delta(\vec{k}+\vec{k}') = B_{\vec{k}} \delta(\vec{k}+\vec{k}').$$

Четыре коэффициента $A_{1\vec{k}}$, $A_{2\vec{k}}$, $B_{\vec{k}} = \mathrm{Re}\, B_{\vec{k}} + i\, \mathrm{Im}\, B_{\vec{k}}$ легко связать с параметрами Стокса [7]. Имеем

$$\frac{dA_{1\vec{k}}}{dt} = -\frac{\partial A_{2\vec{k}}}{\partial t} = -\frac{2e^2\omega_{oe}^2}{m_e^2 \left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon\right|_{\omega=\omega(\vec{k})}} \mathrm{Im} \int \frac{d\vec{k}_1}{\omega^2(\vec{k}_1)} \frac{(\vec{k}-\vec{k}_1)^2}{[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}_1)]^2} \times$$

$$\times \left[B^{x}_{\vec{k}} B_{\vec{k}_1} pq + B_{\vec{k}} B^{x}_{\vec{k}_1} rs + A_{1\vec{k}_1} B^{x}_{\vec{k}} ps + A_{2\vec{k}_1} B^{x}_{\vec{k}} qr\right], \qquad (8)$$

$$\frac{\partial B_{\vec{k}}}{\partial t} = \frac{ie^2\omega_{oe}^2}{m_e^2 \left|\frac{\partial}{\partial\omega}\omega^2\varepsilon^t\right|_{\omega=\omega(\vec{k})}} \int \frac{d\vec{k}_1 (\vec{k}-\vec{k}_1)^2}{\omega^2(\vec{k}_1)[\omega(\vec{k})-\omega(\vec{k}_1)]^2} \Big\{ B_{\vec{k}} \Big[A_{1\vec{k}_1}(p^2-$$

$$-s^2) + A_{2\vec{k}_1}(r^2-q^2) + (B_{\vec{k}} + B^{x}_{\vec{k}_1})(rp-sq) + (A_{2\vec{k}} - A_{1\vec{k}}) \times$$

$$\times \left[B_{\vec{k}_1} pq + B^{x}_{\vec{k}_1} rs + A_{2\vec{k}_1} qr + A_{1\vec{k}_1} ps\right]\Big]\Big\}, \qquad (9)$$

где

$$p = (\vec{e}_{1\vec{k}}\, \vec{e}_{1\vec{k}_1}), \qquad q = (\vec{e}_{2\vec{k}}\, \vec{e}_{2\vec{k}_1}), \quad r = (\vec{e}_{2\vec{k}_1}\, \vec{e}_{1\vec{k}}), \quad s = (\vec{e}_{2\vec{k}}\, \vec{e}_{1\vec{k}_1}).$$

Первое равенство (10) показывает, что взаимодействие волны $\vec{k}$ с любыми другими может приводить лишь к изменению соотношения между интенсивностями различных компонент поляризации, не меняя полную энергию волны $\vec{k}$. Это характерное свойство рассматриваемого нелинейного взаимодействия резко отличает его от других известных нелинейных взаимодействий (распадных процессов и индуцированного рассеяния), приводящих к изменению спектрального состава излучения. Другим следствием первого равенства (8) является сохранение энтропии (следующее из сохранения числа квантов) и, следовательно, к обратимости нелинейных взаимодействий для случайных волн. Последнее можно проиллюстрировать на примере решений (8), (9) для почти монохроматических волн [4)]

$$A_1(t) = A_1(0)\cos^2\frac{\Omega t}{2} + A_2(0)\sin^2\frac{\Omega t}{2};$$

$$A_2(t) = A_1(0)\sin^2\frac{\Omega t}{2} + A_2(0)\cos^2\frac{\Omega t}{2},$$

$$Re\,B = Re\,B(0) - \frac{e^2\omega_{oe}^2\, Im\,B(0)}{m_e^2\,\omega^3}\sin\Omega t, \quad Im\,B = Im\,B(0),$$

$$\Omega = 2\frac{e^2\omega_o^2}{m_e^2\,\omega^3}\, Im\,B(0), \quad A_{1,2} = \int A_{1,2\vec{k}}\, d_{\vec{k}}, \quad B = \int B_{\vec{k}}\, d_{\vec{k}}.$$

Это решение сходно с тем, которое имеет место для фиксированной фазы и приводит к тем же оценкам (7).

4. В заключение приведем грубую оценку, иллюстрирующую роль рассмотренного взаимодействия для самого неблагоприятного случая, когда эллиптичность весьма мала (например в (7)). Полагая, что размер объекта L равен пути ct , на котором эллипс поворачивается на угол $\pi/2$, можно оценить минимальную степень эллиптичности W_1/W_2, начиная с которой эффект существен. Для Крабовидной туманности, например, при $W_1 \simeq W_2 = 5$ эв/см^3 для $\lambda = 2\pi c/\omega \sim 100$ м, $L = 10^{19}$ см, n = 10 см$^{-3}$, получим весьма малую величину $W_1/W_2 \sim 10^{-3}$. Учет рассматриваемого эффекта еще более существен в других радиоисточниках с большей плотностью излучения, а также при распространении радиоволн в ионосфере и т.п.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
25 ноября 1965 г.

Литература

[1] В.Л.Гинзбург, С.И.Сыроватский. УФН, 87, 65, 1965.

[2] Л.М.Коврижных, В.Н.Цытович. ЖЭТФ, 47, 1454, 1964.

[3] В.Н.Цытович. Астр. ж., 42, 33, 1965.

[4] В.Н.Цытович. Изв.ВУЗов, Радиофизика, 8, 3, 1965.

[5] Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы, М., 1963.

[6] С.А.Ахманов, Р.В.Хохлов. Нелинейная оптика, М., 1964.

[7] Г.В.Розенберг. УФН, 56, 66, 1955.

---

1) По поводу астрофизических следствий распадных процессов, описываемых этим током, см. [3,4] .

2) Здесь для простоты положено, что все величины зависят лишь от t. Нетрудно перейти к случаю, когда все величины зависят от x, заменив t на x/c.

3) $\vec{E}_{\vec{k}} = e_{1\vec{k}} E_{1\vec{k}} + e_{2\vec{k}} E_{2\vec{k}}$, где $\vec{e}_{1\vec{k}}$ и $\vec{e}_{2\vec{k}}$ – два единичных вектора поляризации, перпендикулярных $\vec{k}$.

4) Для случайных волн характерное время нелинейного взаимодействия τ должно удовлетворять условию $\tau \gg 1/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ – ширина спектра волн.