О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ В СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СПЛАВАХ

В.П.Галайко

В задаче о движении вихревых нитей в сверхпроводнике II рода [I] обычный гидродинамический подход затрудняется наличием решетки. В состоянии локального равновесия конденсат характеризуется сверхпроводящей скоростью $\vec{v}_s$ и плотностью электронов N. Однако скорость релаксации N ввиду кулоновского взаимодействия настолько велика, что единственной "гидродинамической" величиной является $\vec{v}_s$. Нетрудно получить уравнение для $\vec{v}_s$:

$$\vec{v}_s = e/m\,(\vec{E} - \nabla\varphi),$$

но последнее есть тривиальное следствие уравнений Максвелла, поскольку согласно определению

$$rot\,\vec{v}_s + (e/m)\vec{H} = 0$$

($\vec{v}_s = 1/2m\,(\nabla x - 2e\vec{A})$, x - фаза параметра упорядочения $\Delta = |\Delta| exp(ix)$, $\vec{H} = rot\,\vec{A}$, $\hbar = c = 1$).

Ввиду полевого характера движения вихря, как линии особенностей $v_s \sim 1/2mr$ [2], для решения задачи фактически достаточно найти непосредственно отклик сверхпроводящей системы на внешнее поле, т.е. ток $\vec{j} = \vec{j}\{\vec{A}\}$ как функционал от $\vec{A}$. В случае "грязных" сплавов ($\tau T_c \ll 1$) для физически разумных частот движения $\omega\tau \ll 1$ это может быть сделано прямым разложением $\vec{j}$ по малому параметру ωt :

$$\vec{j} = \vec{j}_s\{\vec{v}_s\} + \vec{j}_n, \quad \vec{j}_n = \hat{\sigma}\{\vec{v}_s\}\vec{E},$$

где $\vec{j}_s\{\vec{v}_s\}$ - равновесный сверхпроводящий ток в заданном магнитном поле $\vec{A}$. Фаза x в $\vec{v}_s$ определяется дополнительным уравнением $div\,\vec{j}_s = 0$, которое вытекает из мнимой части равновесного уравнения для параметра упорядочения. Ядро оператора проводимости $\hat{\sigma}\{\vec{v}_s\}$, как можно показать, представляется в виде

$$(-i)\,d/d\omega \langle j_i, j_k \rangle|_{\omega \to \Omega},$$

где коррелятор $\langle j_i, j_k \rangle$ также вычислен по состоянию равновесия в заданном внешнем поле I). Приведенные соотношения составляют вместе с уравнениями Максвелла и уравнением непрерывности полную систему, позволяющую найти уравнения движения вихрей.

Для вывода этих уравнений удобно исходить из общих принципов неравновесной термодинамики (см., например, [3]). Работу, проведенную над системой внешним током $\vec{j}_{вн}$ в единицу времени

$$\dot{W} = -\int dV \vec{j}_{вн}\vec{E},$$

можно выразить через отклик системы:

$$\dot{W} = \partial/\partial t \int dV \frac{H^2}{8\pi} + \int dV \left[\vec{j}_s \vec{E} + \vec{j}_n \vec{E}\right],$$

откуда ввиду $\vec{E} = (m/e)\dot{\vec{v}}_s + \nabla\varphi$ и $div\, \vec{j}_s\{\vec{v}_s\} = 0$ следует:

$$\dot{W} = \partial/\partial t \int dV \left[\frac{H^2}{8\pi} + F\{\vec{v}_s\}\right] + \int dV \hat{\sigma}\{\vec{v}_s\} E^2 \left(\frac{\delta}{\delta \vec{v}_s} \int dV F = \frac{m}{e}\vec{j}_s\right). \quad (I)$$

Согласно этому уравнению минимальная работа обратимого перехода в неравновесное состояние равна:

$$W_{min} = \int dV \left[\frac{H^2}{8\pi} + F\{\vec{v}_s\}\right] = -\frac{\Delta S}{T} \quad (2)$$

(ΔS - отклонение энтропии от равновесного значения), в то время как потери на необратимые процессы представляются в виде $T\Delta \dot{S} \approx \int dV \hat{\sigma}\{\vec{v}_s\} E^2$. Вычисление последнего интеграла для движущегося вихря дает

$$T\Delta \dot{S} = \int dl\, \eta\, v_l^2, \quad (3)$$

где интегрирование выполняется вдоль вихревой линии, $\vec{v}_l$ - скорость элемента нити.

Выразим величину W_{min} (2) через параметры нити, находящейся во внешнем поле. Для предельно жестких сверхпроводников ($\varkappa \gg$ I) поле нити мало ($\sim \lambda/\varkappa$ в безразмерных переменных [2]) и можно разложить выражение (2) по этой малой величине. Удерживая лишь слагаемые, содержащие нить, до второго порядка малости, получим:

$$W_{min} = \int dV \left[\frac{\vec{H}\delta\vec{H}}{4\pi} + \frac{m}{e}\vec{j}_s \delta\vec{v}_s\right] + \int dV \left[\frac{(\delta\vec{H})^2}{8\pi} + \frac{m}{2e}\delta\vec{j}_s \delta\vec{v}_s\right],$$

где $\delta\vec{H}, \delta\vec{j}_s, \delta\vec{v}_s$ - величины, описывающие вихрь. Интегрирование этого выражения по частям при помощи формулы $\delta\vec{H} = \left(-\frac{m}{e}\right) rot\, (\delta\vec{v}_s)$ и уравнений Максвелла приводит из-за наличия особенности у $\delta\vec{v}_s$ к следующему результату:

$$W_{min} = \frac{1}{4e} \int d\vec{l}\vec{H} + \varepsilon_0 \int dl \quad (4)$$

($\varepsilon_0 = \delta H_m/8e$ - собственная энергия вихря на единицу длины, δH_m - поле в центре вихря). Второй член, очевидно, представляет "упругую" энергию нити.

Из уравнений релаксации параметров частичного равновесия системы (т.е. координат $\vec{r}(\varphi, t)$ нити): $\dot{x}_i = v_{Li} = \int dl' \gamma_{ik} \frac{\delta S}{\delta x'_k}$ благодаря (2) и (3) и онзагеровскому принципу симметрии γ_{ik} следует [2]:

$$\vec{v}_L = \frac{T}{\eta} \frac{\delta S}{\delta r} = -\frac{1}{\eta} \frac{\delta W_{min}}{\delta r}.$$

Отсюда, варьируя (4) по элементу нити, находим окончательно:

$$\eta \vec{v}_L = [\vec{j}_T \times \vec{\Phi}_0] + \varepsilon_0 \frac{\vec{n}}{R}, \qquad (5)$$

где $\vec{j}_T \equiv \vec{j}_s$ - внешний ток, $\Phi_0 = \pi/e$ - магнитный поток вихря, $\vec{n}$ - главная нормаль к вихревой линии, R -радиус кривизны нити. Отметим, что согласно полученному уравнению эффективная масса нити ввиду приближения $\omega\tau \ll 1$, естественно, равна нулю. Благодаря нелинейности функционалов $\vec{j}_s\{\vec{v}_s\}$ и $\hat{\sigma}\{\vec{v}_s\}$ коэффициенты η и ε_0, вообще говоря, зависят от внешнего тока. Простые оценки показывают, что границы применимости уравнения (5) даются неравенствами: $j_T \ll j_{кр}$, $R \gg \lambda/\varkappa$ (λ - глубина проникновения поля).

При наложении постоянного внешнего тока $\vec{j}_T$ не смешанное состояние в сверхпроводнике средняя напряженность электрического поля, создаваемая движущимися вихрями, равна: $\vec{E}_{cp} = -[\vec{v}_L \times \vec{B}]$, откуда с учетом уравнения (5) следует: $\vec{E}_{cp} = \rho \vec{j}_T$. Для сопротивления имеем:

$$\rho = \frac{\Phi_0 B}{\eta} = \frac{\pi B}{e\eta}$$

и вблизи T_c для не слишком сильных полей $\rho = \rho_n \frac{B}{H_{c2}}$ [1].

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Дж.Бардина (США) за оказанное им стимулирующее влияние на эту работу и И.М.Лифшица за привлечение внимания к работам А.М.Косевича [4] по теории движения дислокаций, формально близкой к рассмотренной задаче.

Харьковский
государственный университет
им. А.М.Горького

Поступило в редакцию
15 декабря 1965 г.

Литература

[I] C.F.Hempstead, V.B.Kim.Phys. Rev. Lett., I2, I45, I964; A.R.Strand, C.F.Hempstead, V.B.Kim. Phys. Rev. Lett., I3, 794, I964; P.W.Anderson, V.B.Kim. Revs. Mod. Phys., 36, 39, I964; J.Bardeen. Phys. Rev. Lett., I3, 747, I964; M.J.Stephen, J.Bardeen. Phys. Rev. Lett., I4, II2, 1965.

[2] А.А.Абрикосов. ЖЭТФ, 32, I442, I957.

[3] С.де Гроот, П.Мазур. Неравновесная термодинамика. Изд. "Мир", I964.

[4] А.М.Косевич. Теория дислокаций. Ротапринт ФТИ АН УССР, Харьков, I963.

I) В локальном приближении эти вычисления были проведены автором под руководством Дж.Бардина (США). В частности, для коэффициента вязкости движущегося вихря вблизи T_c было получено значение: $\eta = \bar{\chi}\sigma_n H_{c2}/e$, где σ_n - проводимость нормального металла.

2) Единственное антисимметричное выражение, которое нужно было бы рассмотреть, $\gamma_{ik} \sim e_{ikl} v_{kl}$, приводит к силе, действующей вдоль нити. Остальные выражения не согласуются с законом сохранения энергии, вытекающим из [I].