О СОСТОЯНИИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ В ОКРЕСТНОСТИ λ-ЛИНИИ

Л.В.Кикнадзе, Ю.Г.Мамаладзе, О.Д.Чейшвили

Пусть жидкий гелий полностью заполняет сосуд, давление P_0 у крышки которого и температура T таковы, что на некоторой глубине z_λ давление соответствует λ-линии ($P_0 + \rho g z_\lambda = P_\lambda(T)$)[1]. Казалось бы диаграмма состояния требует, чтобы в верхней части сосуда ($0 \leq z \leq z_\lambda$) гелий находился бы в состоянии $He\,II$, а в нижней ($z_\lambda \leq z \leq H$) – в состоянии $He\,I$. Предметом этого сообщения является утверждение, что в действительности жидкий гелий должен оказаться либо везде сверхтекучим, либо везде нормальным.

Такое утверждение следует из рассмотрения уравнения феноменологической теории сверхтекучести Гинзбурга и Питаевского [I]:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + \alpha\Psi - \beta|\Psi|^2\Psi = 0, \qquad (I)$$

где m – масса атома гелия, $\Psi = |\Psi|\exp(i\varphi)$ – волновая функция, определяющая плотность ρ_s и скорость $\vec{v}_s$ сверхтекучей компоненты ($\rho_s = m|\Psi|^2$, $\vec{v}_s = \hbar\nabla\varphi/m$), α и β – коэффициенты, зависящие от температуры и давления. В рассматриваемом случае $\nabla\varphi = 0$, в связи с чем можно положить $\varphi = 0$. Кроме того, пренебрегая зависимостью плотности гелия ρ от давления и температуры, можно записать коэффициент α в виде:

$$\alpha = \alpha'(T_{\lambda 1} - T)\left[1 + \left(\frac{dT}{dP}\right)_\lambda \frac{P - P_{\lambda 1}}{T_{\lambda 1} - T}\right] = \alpha'(T_{\lambda 1} - T)\frac{z_\lambda - z}{a_\lambda} \quad (2)$$

$$\text{при} \quad 0 \le z \le z_\lambda,$$

$$\alpha = 0 \qquad \text{при} \quad z_\lambda \le z \le H,$$

где $\alpha' \approx 4{,}5.10^{-17}$ эрг/град [I], а параметр a_λ определяется равенством

$$a_\lambda = \frac{P_\lambda(T) - P_{\lambda 1}}{\rho g} \approx 7 \cdot 10^5 (T_{\lambda 1} - T)\,\text{см}. \qquad (3$$

При изменении температуры от $T_{\lambda 2}$ до $T_{\lambda 1}$ этот параметр меняется от величины порядка 2.10^5 см до нуля. Заметим, что при $P_\lambda(T) \gg P_1$ и $P_\lambda(T) \gg P_0$ величины z_λ и a_λ близки друг к другу. Если же $P_\lambda(T) \gtrsim P_0 \gg P_{\lambda 1}$, то $z_\lambda \ll a_\lambda$.

Введем обозначения $\alpha_1 = \alpha'(T_{\lambda 1} - T)$, $a_0^2 = \hbar^2/(2m\alpha_1)$, $x = (a_0^2 a_\lambda)^{-1/3}(z_\lambda - z)$ [2] и $f = (a_\lambda/a_0)^{1/3}(\beta/\alpha_1)^{1/2}|\Psi|$. Тогда в верхней части сосуда $0 \le z \le z_\lambda$ ("сверхтекучая" область) уравнение (I) запишется в виде:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + xf - f^3 = 0 \qquad \text{при} \quad 0 \le x \le h_s, \qquad (\text{Ia})$$

где $h_s = (a_0^2 a_\lambda)^{-1/3} z_\lambda$. А в нижней части сосуда $z_\lambda \le z \le H$ ("нормальная" область) уравнение (I) примет вид

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - f^3 = 0 \qquad \text{при} \quad -h_n \le x \le 0, \qquad (\text{Iб})$$

где $h_n = (a_0^2 a_\lambda)^{-1/3}(H - z_\lambda)$.

Первые интегралы этих уравнений имеют вид:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2} f^4 + xf^2 + \int_x^{h_s} f^2 dx = \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{h_s} \qquad \text{при } 0 \le x \le h_s, \qquad (4\text{a})$$

$$\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - \frac{1}{2} f^4 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{-h_n} \qquad \text{при } -h_n \le x \le 0, \qquad (4\text{б})$$

где учтены граничные условия $f(h_s) = f(-h_n) = 0$, а производные (df/dx) в точках $x = h_s$ и $x = -h_n$ являются пока неопределенными постоянными [3]. Так же, как и во многих случаях, рассмотренных в работах [I-4], равенство (4б) устанавливает зависимость f от x при помощи эллиптического интеграла первого рода. Однако, в отличие от всех этих случаев, первый интеграл (4а) не дает алгебраического выражения (df/dx) через f, что препятствует общему решению задачи.

Тем не менее можно утверждать, что вообще говоря существует ненулевое решение уравнения (I), определенное во всем сосуде, т.е. существует функция f, составленная из гладко сшитых в точке $x=0$ решений уравнений (Iа) и (Iб). А это означает, что сверхтекучесть возможна и в "нормальной" области. (Функция $|\Psi|$ при этом растет от нуля при $z=0$, переходит через максимум где-то в "сверхтекучей" области и монотонно убывает до нуля при $z=H$). Однако в каких-то критических условиях такая функция может тождественно обратиться в нуль, и тогда жидкость окажется нормальной даже в "сверхтекучей" области.

В виду уже упомянутых математических трудностей подтвердим только что высказанные соображения приближенным расчетом, справедливым в частном случае "бесконечно" глубокой "нормальной" области, покрытой "тонким" сверхтекучим слоем: $h_n \gg h_s$ или $H \gg z_\lambda$. Точнее будем считать h_n настолько большим, что $(df/dx)_{-h_n}$ можно положить равным нулю. Смысл утверждения о малости h_s выяснится ниже.

В таких условиях равенство (4б) упрощается и решение уравнения (Iб) для "бесконечной" "нормальной" области записывается в виде

$$f = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{f(0)}\right)^{-1} \qquad \text{при} \quad -\infty < x \leq 0. \tag{5б}$$

А решение уравнения (Iа) определим, минуя первый интеграл (4а), разложением по степеням x, удовлетворяющим условиям гладкого сшивания с выражением (5б):

$$f = f(0)\left\{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} f(0)x + \frac{1}{2} f^2(0)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{\sqrt{2}} f^3(0) - 1\right)x^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} f(0)\left(f^3(0) - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x^4 + \frac{1}{20} f^2(0)\left(\frac{7}{2\sqrt{2}} f^3(0) - 1\right)x^5 + \cdots\right\}. \tag{5а}$$

Неопределенная постоянная $f(0)$ должна быть найдена из граничного условия $f(h_s)=0$.

Последнее условие и определяет критическую толщину "сверхтекучей" области h_{sc}, ниже которой (при $h_s \le h_{sc}$) уравнения (Iа), (Iб) имеют только тривиальное нулевое решение. Действительно, используя формулу (5а) для определения $f(0)$ уравнением $f(h_s) = 0$, нетрудно убедиться, что оно не имеет ненулевых решений ($f(0) \equiv 0$), если

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{h_s^{3k}}{3k\,(3k-1)(3k-3)\,(3k-4)\cdots 3\cdot 2} = 0, \tag{6}$$

что дает $h_{sc} \approx 2$. (Это и есть мера "тонкости" "сверхтекучего" слоя, так как при $h_s > h_{sc}$ ряд (5а) сходится быстро.)

Возвращаясь к размерной записи, получаем следующую оценку для критической толщины "сверхтекучего" слоя над "бесконечно" глубокой "нормальной" областью $z_{\lambda c} \approx 2(a_0^2 a_\lambda)^{1/3} \approx 2{,}2 . 10^{-3}$ см.

Смещение λ- точки, обусловленное внешним давлением, описывается следующей формулой

$$\delta T_\lambda = \frac{P_0 - P_1 + \rho g z_{\lambda c}}{-\left(\frac{dP}{dT}\right)_\lambda}. \tag{7}$$

При $P_0 - P_1 \gg \rho g z_{\lambda c}$ формула (7) практически совпадает с уравнением λ- линии, но при малых P_0 она описывает дополнительное смещение λ - точки, связанное с рассмотренными в этой заметке явлениями. В частности, смещение λ- точки под давлением насыщенных паров равно

$$\delta T_{\lambda s} = \frac{\rho g z_{\lambda c}}{\left(\frac{dP}{dT}\right)_s - \left(\frac{dP}{dT}\right)_\lambda} \approx 3\cdot 10^{-9}\,{}^\circ K, \tag{8}$$

где производная $(dP/dT)_s$ берется вдоль кривой $P = P_s(T)$ при $T = T_{\lambda 1}$. Чрезвычайная малость вычисленной таким образом величины $\delta T_{\lambda s}$ означает, что большой объем жидкого гелия, находящийся в равновесии со своим паром, будет находиться в сверхтекучем состоянии практически при любой температуре $T<T_{\lambda 1}$, даже если в большей его части соблюдается условие $P>P_\lambda(T)$.

Институт физики
Академии наук
Грузинской ССР

Поступило в редакцию
31 января 1966 г.

Литература

[1] В.Л.Гинзбург, Л.П.Питаевский. ЖЭТФ, <u>34</u>, 1240, 1958.
[2] Ю.Г.Мамаладзе, О.Д.Чейшвили. Письма ЖЭТФ, <u>2</u>, 123, 1965.
[3] O.D.Cheishvili, Yu. G.Mamaladse. Phys.Lett., <u>18</u>, 278, 1965.
[4] Ю.Г.Мамаладзе, О.Д.Чейшвили. ЖЭТФ, <u>50</u>, 169, 1966.

---

1) Ось z направлена вниз, $0 \le z \le H$, H – высота сосуда. Всегда подразумевается, что $0<z_\lambda<H$, а также $P_s(T) \le P_0 < P_\lambda(T)$, $P_s(T) < P_{\lambda 1}$, $P_{\lambda 1} < P_\lambda(T) < P_{\lambda 2}$, $T_{\lambda 2} < T < T_{\lambda 1}$, где P_s – давление насыщенного пара, $(T_{\lambda 1}, P_{\lambda 1})$ и $(T_{\lambda 2}, P_{\lambda 2})$ – точки на концах λ – линии ($T_{\lambda 1}$ – λ – точка под давлением насыщенных паров). Считая λ – линию прямой, имеем $(dP/dT)_\lambda = -(P_{\lambda 2} - P_{\lambda 1})/(T_{\lambda 1} - T_{\lambda 2}) \approx -100$ ат/град.

2) Существенно, что в теории имеется не зависящий от температуры характеристический размер $(a_0^2 a_\lambda)^{1/3} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-3}$ см. Ниже подразумевается, что поперечные размеры сосуда гораздо больше всех трех характеристических размеров теории a_0, a_λ, $(a_0^2 a_\lambda)^{1/3}$.

3) Отметим интересное равенство:

$$\int_0^{x_0} f^2 dx = \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{h_s} - \left(\frac{df}{dx}\right)^2_{-h_n}.$$