

## ЦЕПОЧКИ СОЛИТОНОВ В ПЛАЗМЕ С МАГНИТНОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

С.К.Жданов, Б.А.Трубников

Показано, что двумерные движения плазмы при учете магнитной вязкости описываются уравнением Кадомцева – Петвиашвили, для которого указаны решения нового типа в виде цепочек экранированных солитонов.

1. В работах <sup>1, 2</sup> было показано, что в бесстолкновительном приближении плазму в магнитном поле следует описывать уравнениями анизотропной магнитной гидродинамики с удержанием члена бездиссипативной ионной вязкости. В работе <sup>3</sup> нами рассмотрено решение в виде сильно нелинейного солитона одномерного и показано, что в двухжидкостной модели на фронте солитона раскачиваются ленгмюровские волны, нарастающие до уровня энергии колебаний  $\tilde{\omega}$  порядка  $nT\sqrt{m_e/m_i}$ . В данной работе в рамках одножидкостной модели исследованы слабонелинейные двумерные волны. Уравнения для них приводятся к известному уравнению Кадомцева – Петвиашвили (4), для которого нами получены решения нового типа – цепочек экранированных солитонов.

2. Плазма в магнитном поле вида  $B_z(x, y)$  описывается уравнениями

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = - \vec{\nabla} P + \eta \Delta [\mathbf{h}\mathbf{v}]; \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B; \quad P = p_{\perp} + B^2/8\pi, \quad (1)$$

где  $\eta = p_{\perp}^i / 2\omega_{Bi}$  – коэффициент ионной бесстолкновительной вязкости (“косая вязкость”, см. (1, 2, 5)). Остальные уравнения

$$\dot{\rho} = - \rho \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad \dot{p}_{\perp} = - 2p_{\perp} \operatorname{div} \mathbf{v}; \quad \dot{B} = - B \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2)$$

приводят к адиабате  $P = P_0(\rho/\rho_0)^2$ , так что вводя скорость поперечного звука  $c_0 = \sqrt{2P_0/\rho_0}$  и характерную длину  $R_i = \eta/\rho_0 c_0$  порядка ларморовского радиуса ионов, имеем уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - c_0^2 \nabla \frac{\rho}{\rho_0} + c_0 R_i \Delta[\mathbf{h} \mathbf{v}]; \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \rho \mathbf{v}, \quad (3)$$

которые при слабой нелинейности можно свести к известному уравнению Кадомцева – Петвиашвили <sup>4</sup>.

3. Проведем этот вывод, считая, что  $v_{x,y}(t, x, y)$  не зависят от  $z$ , что нелинейность является слабой, и что производные по  $y$  малы ( $\partial/\partial y \ll \partial/\partial x$ ). Полагая  $\rho/\rho_0 = 1 + \psi$ , из уравнений (3) получим

$$\psi_{tt}'' - c_0^2 \psi_{xx}'' = c_0^2 \psi_{yy}'' + c_0 R_i \Delta(\operatorname{rot} \mathbf{v})_z + \operatorname{div}(\mathbf{v} \nabla) \psi - \operatorname{div}(\psi \mathbf{v})_t'. \quad (4)$$

Все члены справа считаются малыми и их можно найти последовательными приближениями. В нулевом приближении имеем

$$\psi_t' + c_0 \psi_x' \cong 0; \quad (\operatorname{rot}_z \mathbf{v})_t' \cong c_0 R_i (v_x)_{xxx}''''; \quad v_x \cong c_0 \psi, \quad (5)$$

поэтому в малых членах справа допустима замена  $\partial/\partial t \rightarrow -c_0 \partial/\partial x$ , после которой уравнение (4) дает

$$c_0^{-2} \psi_{tt}'' - \psi_{xx}'' = \psi_{yy}'' - R_i^2 \psi_{xxxx}'''' + \frac{3}{2} (\psi^2)_{xx}''. \quad (6)$$

Оператор слева приближенно заменяем на

$$\left( \frac{\partial}{c_0 \partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \psi}{c_0 \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \cong -2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{c_0 \partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad (7)$$

что и дает уравнение Кадомцева – Петвиашвили (КП)

$$(c_0^{-1} \psi_t' + \psi_x' + \frac{3}{2} \psi \psi_x' - \frac{1}{2} R_i^2 \psi_{xxx}''')_x' = -\frac{1}{2} \psi_{yy}'' \quad (8)$$

встречающееся и во многих других задачах.

4. Для уравнения КП (8) ранее были известны частные решения в виде одномерных экспоненциально-спадающих солитонов, а также двумерные одиночные или  $N$ -солитонные решения, спадающие как  $r^{-2}$ . Ниже указан некоторый новый класс решений в виде горизонтальной и вертикальной цепочек солитонов.

Для волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  со скоростью  $u < c_0$  и не меняющих профиля, введем новые безразмерные аргументы

$$\xi = (x - ut)/R_i; \quad \eta = y/R_i \quad (9)$$

и параметр  $\kappa = \sqrt{1 - u/c_0}$ . Тогда нетрудно проверить, что решение

$$\psi = -4\mu^2(1 + fg)/(f + g)^{-2}; \quad f = \operatorname{ch} \mu \xi; \quad g = \alpha \cos q \eta \quad (10)$$

с параметрами

$$\alpha^2 = (\kappa^2 - 2\mu^2)/(\kappa^2 - \frac{1}{2}\mu^2); \quad q = \mu \sqrt{2\kappa^2 - \mu^2} \quad (11)$$

удовлетворяет уравнению (8) и обладает следующими свойствами.

а) При  $\mu = \kappa/\sqrt{2}$  оно дает обычный одномерный солитон разрежения

$$\psi_1 = -2\kappa^2 \operatorname{ch}^{-2}(\kappa \xi/\sqrt{2}). \quad (12)$$

б) При  $\mu > \kappa/\sqrt{2}$  параметр  $q$  становится мнимым, так что имеем

$$\psi_2 = -4\mu^2(1 + \alpha \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y)(\operatorname{ch} X + \alpha \operatorname{ch} Y)^{-2}; \quad X = \mu \xi; \quad Y = \eta \mu \sqrt{\mu^2 - 2\kappa^2}. \quad (13)$$

Это решение представляет собой как бы  $X$ -образное пересечение двух наклонных солитонов исходного типа (12), искаженных вблизи места пересечения. Вдоль прямых линий  $Y = \pm X$  оно ведет себя как

$$\psi_2(X, Y = \pm X) = -\left(\frac{2\mu}{1+\alpha}\right)^2 (\alpha + \text{ch}^{-2} X). \quad (14)$$

в) В исходной формуле (10) допустима замена  $\alpha \rightarrow -|\alpha|$ , после которой можно перейти к пределу  $\mu \rightarrow 0$ , что приводит к результату

$$\psi_3 = -\frac{16}{3} \kappa^2 \left[1 + \frac{2}{3} \kappa^2 (2\kappa^2 \eta^2 - \xi^2)\right] \left[1 + \frac{2}{3} \kappa^2 (2\kappa^2 \eta^2 + \xi^2)\right]^{-2} \quad (15)$$

хорошо известному ранее (5).

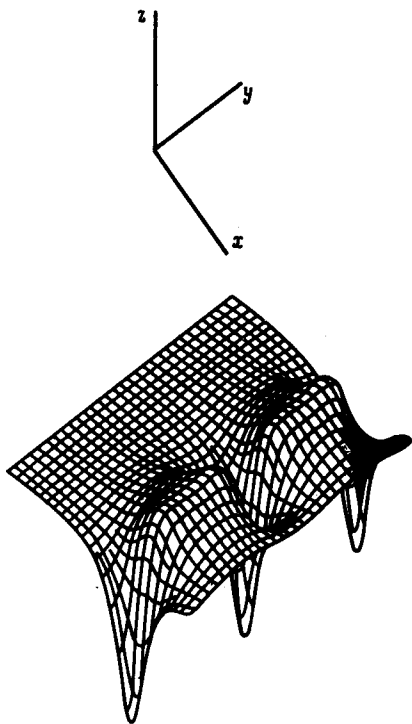
г) Замена  $\mu \rightarrow i\mu_1$  в формуле (10) дает цепочку солитонов вдоль оси  $x$

$$\psi_4 = 4\mu_1^2 (1 + |\alpha| \cos X \text{ch} Y) (\cos X + |\alpha| \text{ch} Y)^{-2}; \quad X = \mu_1 \xi; \quad Y = q_1 \eta, \quad (16)$$

где параметры равны

$$|\alpha| = \sqrt{(\kappa^2 + 2\mu_1^2) / (\kappa^2 + \frac{1}{2}\mu_1^2)} > 1; \quad q_1 = \mu_1 \sqrt{2\kappa^2 + \mu_1^2}. \quad (17)$$

д) Наконец, само решение (10) при  $\mu < \kappa/\sqrt{2}$ ,  $\alpha < 1$  дает цепочку солитонов по оси  $y$  (см. рисунок), которую можно рассматривать как результат развития неустойчивости одномерного солитона (12), обнаруженной ранее в работе <sup>4</sup> и более подробно исследованной в <sup>6</sup>.



Цепочки солитонов поперек направления распространения волны ( $y$ -цепочка)

Таким образом, единая формула (10) позволяет описать все простейшие решения уравнения КП.

Применительно к бесстолкновительной плазме с магнитной вязкостью найденные решения можно интерпретировать как вытянутые вдоль поля цепочки токовых вихрей, движущихся либо колонной друг за другом, либо шеренгой параллельно друг другу.

В заключение авторы хотели бы выразить признательность В.И.Петвиашвили за стимулирующие дискуссии по работе.

## Литература

1. Трубников Б.А., Жданов С.К. Физика плазмы, 1977, 3, 78.
2. Жданов С.К., Трубников Б.А. ЖЭТФ, 1977, 72, 487.
3. Жданов С.К., Трубников Б.А. ЖЭТФ, 1982, 83, 2065.
4. Кадомцев Б.Б., Петвиашвили В.И. ДАН СССР, 1970, 192, 753.
5. Петвиашвили В.И. Неоднородные солитоны. Кн. Нелинейные волны, М.: Наука, 1979, с. 5.
6. Захаров В.Е. Письма в ЖЭТФ, 1975. 22, 364.

Институт атомной энергии  
им. И.В.Курчатова

Поступила в редакцию  
23 октября 1983 г.

---