

О ВОЗДЕЙСТВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВНЕШНЕГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА СИСТЕМУ, ДЕМОНСТРИРУЮЩУЮ ПЕРЕХОД ПОРЯДОК – ХАОС ЧЕРЕЗ БИФУРКАЦИИ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА

С.П. Кузнецов

Исследуется влияние периодического воздействия на динамику модельной системы, демонстрирующей переход к хаосу через удвоения периода. Указан закон подобия и описана структура пространства параметров в области малых амплитуд воздействия.

В последнее время большое внимание уделяется исследованию перехода динамических систем от периодического поведения к хаотическому при изменении параметров¹⁻⁸. Один из типичных сценариев перехода порядок – хаос связан с существованием бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода движений, подчиняющейся законам подобия Фейгенбаума^{2,3}. Такой переход наблюдался в численных и физических экспериментах у механических, радиотехнических, гидродинамических систем⁴⁻⁷. Один из замечательных результатов Фейгенбаума³ состоит в том, что независимо от конкретной природы уравнений системы, ее поведение в окрестности точки перехода можно изучать с помощью модели – одномерного рекуррентного отображения, например,

$$x_{m+1} = \lambda - x_m^2. \quad (1)$$

Система (1) демонстрирует удвоения периода при увеличении параметра λ . Последовательность бифуркационных значений λ_n^0 дается формулой Фейгенбаума $\lambda_n^0 = \lambda_c^0 - K\delta^{-n}$ (справедлива, строго говоря, при больших n). Здесь $\delta = 4,6692$ – универсальная константа, а $\lambda_c^0 = 1,40116$ и $K = 0,7242$ – константы, специфичные для системы (1).

Рассмотрим воздействие малого периодического возмущения на систему, которая в отсутствие возмущения демонстрирует переход к хаосу через удвоения периода и описывается, следовательно, моделью (1). Согласно², λ есть единственный существенный параметр модели, поэтому именно влияние периодического изменения этого параметра следует рассмотреть. Итак, анализируется модель

$$x_{m+1} = \lambda + A \cos(2\pi m w + \theta) - x_m^2, \quad (2)$$

где A – амплитуда, θ – начальная фаза возмущения, w – число вращения, определяющееся соотношением периодов собственного движения и внешнего воздействия. Режимам синхронизации соответствуют рациональные значения w , а режимам биений – иррациональные. Приводимые далее результаты представляют собой обобщение материала, полученного численно для модели (2). Однако они являются столь же общими, как и результаты Фейген-

баума. Это может быть показано с помощью ренормгруппового подхода, что, однако, выходит за рамки данного сообщения.

Как известно, в интервале между двумя бифуркационными значениями параметра $\lambda_n^0 - 1 < \lambda < \lambda_n^0$ невозмущенная система имеет устойчивый режим движения — цикл периода 2^n . Если не рассматривать области, прилегающие к концам интервала, то и при включенном возмущении движение происходит вблизи 2^n -цикла (тем ближе, чем меньше возмущение). При рациональном числе вращения $\omega = p/q$ это периодическое движение с периодом N , равным наименьшему общему кратному чисел 2^n и q , а при иррациональном — квазипериодическое движение. Особый интерес представляет окрестность точки λ_n^0 , поскольку именно там происходит бифуркация — переход от движения вблизи 2^n -цикла невозмущенной системы к движению вблизи 2^{n+1} -цикла.

Пусть сначала число вращения рационально. Рассмотрим N -цикл возмущенной системы при $\lambda \approx \lambda_n^0$. В силу малости возмущения, один из элементов этого цикла x_0 близок к элементу 2^n -цикла невозмущенной системы \bar{x}_0 . Нас будет интересовать параметр $\mu = \partial x_N / \partial x_0$ — мультипликатор N -цикла, а также связанный с ним ляпуновский характеристический показатель $\gamma = 1/N \ln |\mu|$. Очевидно, устойчивому циклу отвечают $|\mu| < 1$, $\gamma < 0$, а неустойчивому $|\mu| > 1$, $\gamma > 0$. Из уравнения $|\mu| = 1$ или $\gamma = 0$ можно отыскать поверхность в пространстве параметров, на которой происходит бифуркация.

Чтобы найти μ и γ , представим величину x_N в виде ряда по степеням $\Lambda = \lambda - \lambda_n^0$, $\xi = x_0 - \bar{x}_0$ и A . Коэффициенты ряда (частные производные от x_N в точке $\Lambda = 0$, $\xi = 0$, $A = 0$) могут быть вычислены с помощью рекуррентных формул, получаемых дифференцированием соотношения (2):

$$\begin{aligned} x_{m+1} &= \lambda_n^0 - x_m^2; & x_{m+1, \Lambda} &= -2x_m x_{m, \Lambda} + 1; & x_{m+1, A} &= -2x_m x_{m, A} + \cos(2\pi m \omega + \theta); \\ x_{m+1, \xi} &= -2x_m x_{m, \xi}; & x_{m+1, A\xi} &= -2(x_m x_{m, A\xi} + x_{m, \xi} x_{m, A}); \\ x_{m+1, AA} &= -2(x_m x_{m, AA} + x_m^2); \\ x_{m+1, A\xi} &= -2(x_m x_{m, \Lambda\xi} + x_{m, \Lambda} x_{m, \xi}); \\ x_{m+1, AA\xi} &= -2(x_m x_{m, AA\xi} + x_{m, \xi} x_{m, AA} + 2x_{m, A} x_{m, A\xi}), \end{aligned} \quad (3)$$

причем $x_N = x_0$, $x_{N, \Lambda} = x_{0, \Lambda}$, $x_{N, A} = x_{0, A}$, $x_{N, AA} = x_{0, AA}$, $x_{0, \xi} = 1$, $x_{0, A\xi} = 0$, $x_{0, AA\xi} = 0$, $x_{0, \Lambda\xi} = 0$. Используя (3), можно показать, что если $q \neq 2^k$, то $x_{N, A} = 0$, а $x_{N, AA}$ не зависит от фазы θ ¹⁾. Учитывая, что $\mu = -1$ при $\Lambda = 0$, $A = 0$, имеем:

$$\mu \approx -1 + x_{N, \Lambda\xi} \Lambda + x_{N, AA} \frac{A^2}{2} = -1 - C_n \Lambda + D_n(w) A^2; \quad \gamma \approx \frac{C_n \Lambda - D_n(w) A^2}{N} \quad (4)$$

Таким образом, при введении возмущения μ остается действительным; бифуркация происходит при

$$\mu = -1, \text{ т. е. } \Lambda_n = D_n(w) A^2 / C_n \text{ или } \lambda_n = \lambda_n^0 + D_n(w) A^2 / C_n. \quad (5)$$

Как известно⁹, переход мультипликатора через -1 сопровождается бифуркацией удвоения периода, в данном случае, рождением $2N$ -цикла.

¹⁾ Случай $q = 2^k$ не представляет особого интереса, так как после k -кратного удвоения периода влияние возмущения сводится к постоянной поправке к λ , и переход к хаосу происходит по Фейгенбауму.

Исследуем зависимость коэффициентов в формуле (4) от n и w . Как известно из решения невозмущенной задачи ⁵, $C_n \sim \delta^n$, $\delta = 4,6692$. Чтобы установить закономерности, которым подчиняется коэффициент $D_n(w)$, проследим за поведением отношений $\Delta_n = D_{n+1}(w)/D_n(w)$. Как показывают численные расчеты, имеет место следующий закон подобия, справедливый при достаточно больших n (практически для $n \gg 2$): при изменении числа вращения в 2^k раз последовательность $\Delta_n(w)$ сдвигается на k шагов: $\Delta_n(2^k w) = \Delta_{n+k}(w)$. Отсюда следует, что если число вращения представляется двоичной дробью с периодом k , то последовательность Δ_n также имеет период k : $\Delta_{n+k}(w) = \Delta_n(w)$.

Найденная численно зависимость Δ_n от w изображена на рис. 1 в координатах $\omega = 2^n w$, $\varphi = \ln \Delta_n$. При $n \gg 2$ точки, отвечающие разным n и w ложатся на одну кривую $\varphi = \varphi(\omega)$ ²⁾. Это наводит на мысль, что φ и Δ_n имеют разумный смысл и для иррациональных w .

Рассмотрим последовательность периодических двоичных дробей, $w_i = p_i/q_i$, сходящихся к иррациональному пределу w . Каждой рациональной аппроксимации w_i соответствует цикл периода N_i , который бифурцирует при $\lambda_n(w_i)$ (см. (5)). Используя (3), можно показать, что при $w_i \rightarrow w$ имеют конечный предел следующие величины: $\lambda_n(w_i)$, $\Delta_n(w_i)$, $\varphi(w_i)$, $\gamma(w_i)$. Соответствующие предельные значения припишем функциям λ_n , Δ_n , φ , γ в иррациональной точке w . Заметим, что $\gamma(w) < 0$ при $\lambda < \lambda_n(w)$ и $\gamma(w) > 0$ при $\lambda > \lambda_n(w)$. Это значит, что при $\lambda = \lambda_n(w)$ происходит бифуркация квазипериодического движения, локализованного около 2^n -цикла невозмущенной задачи. Оно теряет устойчивость, и возникает другой устойчивый квазипериодический режим, локализованный около 2^{n+1} -цикла. По-видимому, именно такие бифуркации "удвоения торов" наблюдались в ⁵.

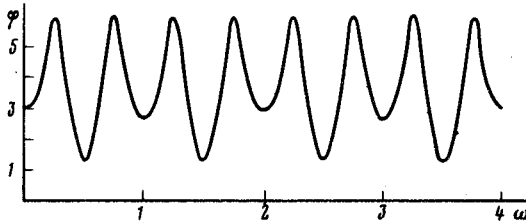


Рис. 1. График функции $\varphi(\omega)$

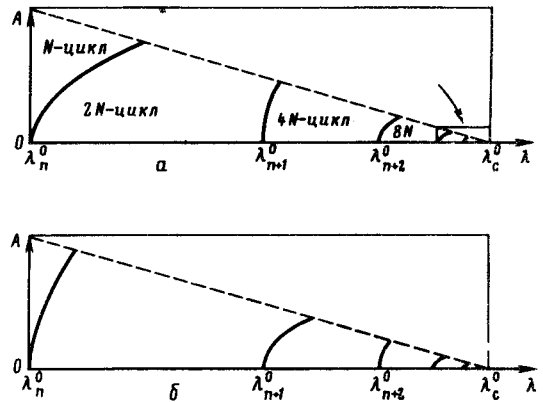


Рис. 2

Рис. 2. Схематическое изображение плоскости параметров (λ, A) : а – для рационального w (двоичная дробь периода 3), б – для иррационального w . Сплошные кривые отвечают бифуркациям удвоения периода циклов (а) и бифуркациям "удвоения торов" (б). Пунктир – условная граница применимости формул (4), (5). Рис. (а) воспроизводится в уменьшенном виде в прямоугольнике, показанном стрелкой. Масштаб не соблюден.

Теперь нетрудно составить представление о структуре пространства параметров (λ, A, w) . Бифуркационные поверхности даются уравнением (5), в котором $D_n/C_n \sim \delta^{-n} \prod_{i=0}^{n-1} \Delta_n(w) \sim \delta^{-n} \exp \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(w \cdot 2^i)$. При рациональных w , представляющихся двоичными дробями

²⁾ Как видно из рис. 1, зависимость $\varphi(\omega)$ является почти периодической и может быть аппроксимирована функцией периода 2^k . Погрешность такой аппроксимации быстро убывает при увеличении k .

периода k , конфигурация областей в плоскости (λ, A) переходит в себя при изменении масштаба относительно точки $(\lambda_c^0, 0)$ в δ^k раз по оси λ и в $\exp \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(w \cdot 2^i)$ раз по оси

A (рис. 2, а). Для иррациональных w масштабной инвариантности в обычном смысле слова нет (рис. 2, б). Однако для чисел w , принадлежащих множеству меры 1 на интервале $(0, 1)$, можно говорить о масштабной инвариантности областей в статистическом смысле. Вместо констант, характеризующих изменение масштаба по оси A при бифуркациях удвоения, теперь фигурируют случайные числа с определенными статистическими характеристиками. Эти характеристики можно найти с помощью функции φ , так как известно, что для выбранной случайным образом точки w дробная часть числа $2^n w$ с равной вероятностью распределена по всему интервалу $(0, 1)$. Поэтому, например, среднее значение логарифма

масштабного фактора Δ_n есть просто $\langle \ln \Delta \rangle = \frac{1}{2^k} \int_0^1 \varphi(w) dw \approx 3,66$ (универсальная константа).

Литература

1. Eckmann J.P. Rev. Mod. Phys., 1981, 53, 643.
2. Feigenbaum M.J. J. Stat. Phys., 1978, 19, 25.
3. Feigenbaum M.J. Comm. Math. Phys., 1980, 77, 65.
4. D'Humières D., Beasley M.R., Huberman B.A., Libchaber A. Phys. Rev., 1982, 26 A, 3483.
5. Анищенко В.С., Астахов В.В., Летчфорд Т.Е., Сафонова М.А. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1983, 26, 832.
6. Кузнецов С.П. Изв. высш. уч. зав., сер. Радиофизика, 1982, 25, 1364.
7. Gollub J.P., Benson S.V. J. Fluid Mech., 1980, 100, 449.
8. Geisel T., Nierwethberg J., Keller J. Phys. Lett., 1981, 86 A, 75.
9. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978, 257.