К ТЕОРИИ НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Д.А.Киржниц, М.А.Лившиц

I. Один из центральных вопросов теории неперенормируемых взаимодействий (НПВ) состоит в том, являются ли трудности этой теории следствием неумения решать соответствующие динамические уравнения вне рамок теории возмущений, или же эти трудности свидетельствуют о непригодности самих уравнений. Первая точка зрения служит исходным пунктом разрабатываемого в настоящее время метода "ператизации" [1,2] ; однако реальные успехи этого направления пока еще далеко не очевидны.

Вторая возможность состоит в том, что в теории НПВ нельзя пользоваться понятиями и величинами, лежащими в самой основе динамического описания, такими, как, например, матрица рассеяния для конечного интервала времени (см. [3] , где эта точка зрения сформулирована применительно к произвольным точечным взаимодействиям). Соответственно, динамические уравнения поля должны быть заменены более общими - аксиоматическими - уравнениями, вывод которых уже не требует использования таких непосредственно не наблюдаемых величин, о которых говорилось выше.

В настоящей заметке обсуждаемый вопрос исследуется с помощью развитого ранее [4] дифференциального по заряду аксиоматического метода на простейшей модели НПВ - рассеяния двух нерелятивистских частиц. Матричный элемент перенормированного лагранжиана взаимодействия в in - представлении $L_{in}(x)$ выбирается в виде

$$\langle \vec{k}, -\vec{k} | L_{in}(0) | \vec{k}', -\vec{k}' \rangle = -g(\vec{k}\,\vec{k}'). \tag{I}$$

Здесь g - физический заряд, масса частиц положена равной единице.

2. В работе Ландау [4] было получено следующее уравнение для фазы рассеяния $\delta(k)$ [I]:

$$\delta''(k)/\delta'(k) = \frac{4}{\pi} k^2 \int_0^\infty \frac{dp\,\delta'(p)}{p(p^2-k^2)} \tag{2}$$

с начальным условием, вытекающим из (I),

$$\delta'(k)\Big|_{g=0} = -k^2. \tag{3}$$

Дифференцируя (2) по g, приходим к уравнению

$$(\delta''/\delta')' - 1/2\,(\delta''/\delta')^2 + 2[(\delta')^2 - C^2k^2] = 0, \tag{4}$$

где $C = \lim\limits_{p\to\infty} \delta'(p)/p$. Член $2C^2k^2$ ведет свое происхождение от интеграла

$$I = \frac{8}{\pi} k^2 \left\{ \int_0^\infty dp \int_0^\infty dq - \int_0^\infty dq \int_0^\infty dp \right\} \frac{p\,\delta'(p)\,\delta'(q)}{q(p^2-k^2)(q^2-p^2)}.$$

Эта величина отлична от нуля в случае неравномерной сходимости интегралов, препятствующей замене порядка интегрирования.

Существенно, что при $C \neq 0$ матрица рассеяния $S(t,-\infty)$ с конечным t неунитарна: согласно [4], величина

$$\frac{d}{dg}\left[S^+(t,-\infty)\,S(t,-\infty)\right]$$

выражается разностью интегралов, подобной I, и пропорциональна C^2. Поэтому динамическое решение, могущее быть полученным из уравнения Шредингера, обязательно соответствует $C = 0$.

В этом последнем случае уравнение (4) дает $\delta'(k) = A/[1+(Ag+B)^2]$, где A и B - функции импульса, определяемые начальными условиями при $g = 0$. В результате получаем хорошо известное выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(k) = \frac{g\,\delta_0'(k)}{k} \Big/ 1 - g\,\frac{2}{\pi} k^2 \int_0^\infty \frac{dp\,\delta_0'(p)}{p(p^2-k^2-i\varepsilon)}, \tag{5}$$

где $\delta_0'(k)=\delta'(k)\big|_{g=0}$. Подстановка сюда выражения (3) приводит к бессмысленному расходящемуся результату. При проведении регуляризации (это соответствует введению в (I) дополнительного фактора $\nu^*(k)\nu(k)$ с достаточно быстро убывающей при $k>L$ функцией $\nu(k)$) мы приходим к выражению

$$f(k)=\frac{gk^2}{1-gik-g\frac{2k^2}{\pi}L},$$

исчезающему в пределе $L\to\infty$.

3. Будем теперь искать такие решения уравнения (4), которые не могут быть получены из уравнения Шредингера (C $\neq$ 0). Такого рода решение действительно существует. Оно соответствует $\delta'(k)=-k^3/(1+\xi^2)$ и имеет вид ($\xi=(3g)^{1/3}k$)

$$f(k)=\frac{1}{2ik}\left(\frac{1+i\xi}{1-i\xi}e^{-2i\xi}-1\right). \qquad (6)$$

Это решение, как и следовало ожидать, оказывается неаналитичным по заряду в точке $g=0$. Оно исчезает при проведении регуляризации, которая приводит к C = 0. Это решение имеет место лишь при $g>0$, что соответствует исходному при выводе (2) предположению об отсутствии связанных состояний.

4. Качественно близкая ситуация возникает в релятивистской задаче рассеяния с четырехфермионным взаимодействием, если ограничиться учетом только двухчастичных промежуточных состояний. Уравнения (2), (4) сохраняют свой вид, если сделать замену k^2 на $E-2m$ (E - суммарная энергия в системе центра масс, m - масса частицы). Решению, аналогичному (6), соответствуют следующие предельные выражения для фазы

$$\delta(E)\sim\begin{cases}\xi^2\left(1-\frac{4}{3}\xi+2\xi^2\ln\xi+\cdots\right) & (\xi\ll 1)\\ \xi^{1/2}\left(1+\frac{15}{512}\frac{1}{\xi}+\cdots\right) & (\xi\gg 1)\end{cases} \qquad (7)$$

Здесь $\xi=\sqrt{g}\,E$, рассматривается предел $m\to 0$. Подробное исследование этой задачи с оценкой вклада многочастичных промежуточных состояний проводится в настоящее время.

5. Из полученных результатов следует, что, по крайней мере в рамках рассмотренных моделей, существует особое решение задачи о НПВ, свободное от трудностей, присущих этим взаимодействиям, и

неаналитичное по заряду. Это решение не может быть получено из динамических уравнений и возникает лишь при аксиоматической постановке задачи. Полученные результаты подтверждают правдоподобность той точки зрения на трудности теории НПВ, которая исходит из непригодности динамической теории для описания таких взаимодействий.

Авторы благодарны участникам теоретических семинаров Физического института им. П.Н.Лебедева, Математического ин-та им. В.А.Стеклова и Объединенного ин-та ядерных исследований за полезные дискуссии.

Физический институт
им. П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
5 мая 1966 г.

Литература

[1] T.D.Lee, C.N.Yang. Phys. Rev., 128, 885, 1962; G.Feinberg, A.Pais. Phys. Rev., 131, 2724, 1963; 133,477, 1964; А.А.Славнов, А.Е.Шабад. Ядерная физика, 1, 724, 1965.

[2] W.Güttinger, R.Penzl, E.Pfaffelhuber. Ann. Physik, 33, 246, 1965.

[3] Л.Д.Ландау. Сб. "Теоретическая физика 20 века", Изд. иностр. лит., М., 1962.

[4] Д.А.Киржниц. ЖЭТФ, 49, 1544, 1965.

---

1) Индекс ℓ у фазы опущен; в рассматриваемой модели существенна лишь p- волна. Штрих означает дифференцирование по g .