Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 7, стр. 410 – 414. *5 октября 1972 г.*

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОБЪЕМА ФЕРМИ-СИСТЕМЫ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛА ЧАСТИЦ

В. А. Ходель

Хорошо известно, что радиус капли жидкости растет с увеличением числа частиц по закону $R = r_0 A^{1/3}$. При добавлении даже относительно небольшого числа частиц $K \lesssim A^{2/3}$ объемная плотность ρ_0 практически не меняется, а все изменение $\rho(r)$ происходит в основном на поверхности, где $\delta\rho \sim (\partial\rho/\partial R)\delta R \sim k/A^{2/3}$ (производная $\partial\rho/\partial R$ не содержит параметра $A^{-1/3}$). Обширные эксперименты подтверждают закон $A^{1/3}$ и для зависимости радиуса ядра от числа частиц. Однако, если просто взять сумму по состояниям λ_i добавленных квазичастиц (как это часто делается в оболочечной модели), то результат будет совсем иной: изменение плотности $\delta_0\rho(r) = \sum_i |\phi_{\lambda_i}(r)|^2$ на краю ядра окажется порядка K/A, т. е. в $A^{1/3}$ меньше, чем в жидкости (как и должно быть для газа независимых частиц). Учет поляризационных эффектов в общем случае не меняет этого результата – ферми-система конечных размеров ведет себя как газ взаимодействующих квазичастиц, а не как жидкость. Поэтому высказывались соображения, что изменение радиуса ядра при изменении числа частиц – процесс скачкообразный и что скачок происходит тогда, когда поле добавленных частиц становится сильным – сравнимым с расстоянием $\delta\epsilon_{sp}$ между комбинирующими 1-частичными уровнями ($\delta\epsilon_{sp} \sim \epsilon_F A^{-1/3}$), для чего требуется, чтобы $k \gtrsim A^{2/3}$.

Однако существует и другая возможность. Действительно, радиус капли при заданном числе частиц A определяется условием $(\partial E/\partial R)_A = 0$. Такое условие будет выполнено автоматически, если в реальной системе существуют низколежащие поверхностные 0^+ колебания, для описания которых можно ввести коллективный гамильтониан

$$E(R) = E_0 + \frac{C_0}{2}(R - R_0)^2 + \frac{B_0\dot{R}^2}{2}. \qquad (1)$$

Чтобы гамильтониан (1) имел смысл, нужно чтобы были выполнены условия адиабатики $\omega_0 \lesssim \delta\epsilon_{sp}$. Выясним, когда это возможно. Определяющая жесткость C_0 локальная амплитуда взаимодействия квазичастиц $F(r)$ (так же, как плотность $\rho(r)$, массовый оператор $\Sigma(r)$) резко меняется в поверхностной области системы, причем за краем частицы притягиваются. (Для ядра, например $f^+_{\ell x} \approx -4$; в то время как $f^+_{in} \approx \pm 0{,}2$ [1] ($f^+ = F^+\frac{p_F M}{\pi^2}$; $F^+ = F^{pp} + F^{np}$)). Поэтому в поверхностном слое могут существовать коллективные колебания, амплитуда которых быстро затухает внутрь, где все градиенты равны нулю. (Пример такого рода колебаний в обычной гидродинамике – внутренние волны в тяжелой жидкости [2]). Притяжение на краю ведет к уменьшению поверхностной жесткости C_0 и при некоторых условиях она может стать аномально малой. Тогда даже слабое воздействие на систему будет приводить к значительному изменению поверхностной плотности, что является характерным свойством жидкости. В работе используются аппарат и обозначения теории конечных ферми-систем [3]. Уравнение для изменения $\delta\rho(r)$ при добавлении нескольких квазичастиц в состояния λ_i имеет вид

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \delta_0\rho(\mathbf{r}) + \int A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega = 0) F(\mathbf{r}')\delta\rho(\mathbf{r}')\, d\mathbf{r}'. \qquad (2)$$

Частоты коллективных колебаний полюса уравнения для эффективного поля определяются уравнением

$$g(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \int A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \qquad (3)$$

В символической записи, часто используемой ниже, (2) выглядит так: $\delta\rho = \delta_0\rho + (AF\delta\rho)$, (3) – так: $g = (FAg)$.

Входящий в (2), (3) пропагатор

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \epsilon + \frac{\omega}{2} \; G(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \epsilon - \frac{\omega}{2}) d\epsilon \qquad (4)$$

может быть представлен в виде суммы двух компонент локальной A^{ℓ} – резкого пика с шириной $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim r_0$ и плавной дальнодействующей $A \sim R^{-3}$ [3]. Как видно из (3), A вносит существенный вклад, когда $g(r)$ отлично от нуля во всем объеме системы. Для поверхностных колебаний $g(r)$ имеет резкий максимум в узком слое $\sim r_0$ и поэтому влияние дальнодействия в A на эти колебания несущественно. В грубом приближении частота ω_0 колебаний является функцией одного безразмерного параметра $f_{ex} = F_{ex} \frac{p_F M}{\pi^2}$. С ростом $|f_{ex}|$ частота ω_0 падает. В адиабатическом пределе, когда $\omega_0 < \delta\epsilon_{sp}$ решения уравнений (2) и (3) можно связать друг с другом, вводя сферически симметричное "собственное поле" $v_0(r)$, определяемое уравнением

$$v_0(r) = \lambda_0 \int F(r) A(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega = 0) v_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \qquad (5)$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом пределе $v_0(r)$ и $g(r)$ совпадают, а $\lambda_0 = 1 + \alpha$ ($\alpha << 1$).

Из (3) и (5) легко получается формула для ω_0, обобщающая обычную формулу адиабатики, выводимую для случая мультиполь-мультипольного взаимодействия

$$\omega_0^2 = \alpha \frac{(v_0 A(0) v_0)}{\left(v_0 \left(\frac{dA}{d\omega^2}\right)_0 v_0\right)}. \qquad (6)$$

Для основного состояния ферми-системы изменение плотности газа квазичастиц $\delta_0\rho$ при изменении числа частиц имеет внутри и на поверхности один порядок. Поэтому отношение интегралов перекрытия $\kappa \sim (v_0 \delta\rho) / (v_0 \delta_0 \rho)$ можно рассматривать как некоторую характеристику состояния системы, – как уже говорилось, для газа $\kappa \sim 1$, а для жидкости $\kappa \sim A^{1/3}$. Умножая (2) слева на $v_0(r)$ и используя (5) нетрудно получить

$$\kappa = \frac{1 + \alpha}{\alpha} \qquad (7)$$

т. е. при $\alpha \sim A^{-1/3}$ система ведет себя уже не как газ, а как жидкость. При этом $\omega_0 \sim \epsilon_F A^{-1/3}$ (см (6)).

Найдем при каких условиях это происходит. В системе больших размеров для расчета пропагатора A можно спользовать квазиклассические методы, развитые в [4]. Будем для упрощения считать, что самосогласованное поле $U(r)$ не зависит от энергии квазичастицы и имеет прямоугольную форму. Будем пренебрегать зависимостью F от импульсов, и считать кроме того, что $F = 0$ при $r < R$, а при $r \geqslant R$ $F = F^{vac}$. (Такая модель, конечно, очень груба, но качественные результаты не меняются и в более сложных случаях). Рассмотрим сначала сферически симметричный случай (0^+-колебания). Тогда надо вычислить только интеграл $A_0(r, r') = \int A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\, d\mathbf{n}$. Эти вычисления довольно длинны, мы приведем здесь только их результат с точностью до несущественных поправок

$$A_0(r, r') = -\frac{2}{\pi^2}\frac{Mp_F^2}{R^2}\int_0^1 y^2(1-y^2)^{1/2}\exp[-2yp_F(r_> - R)]\,dy. \quad (8)$$

Вводя новую переменную $x = p_F(r - R)$ и новую функцию $\psi(x) = \int_0^x v_0(x)\,dx$ мы после подстановки (8) в (5) и дифференцирования обеих частей равенства по x получим дифференциальное уравнение для $\psi(x)$ с условиями $\psi(0) = 0$ $\psi(\infty) = \mathrm{const}$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = 0, \quad (9)$$

где $U(x) = -4\lambda_0 f\int_0^1 y^3(1-y^2)^{1/2}\exp(-2yx)\,dy$.

Это – стандартная задача о нахождении минимальной глубины трехмерной сферически симметричной ямы, при которой в ней появляется первый дискретный уровень. Численное решение дает $\lambda_0 f \approx -6$, т. е. $\lambda_0 = 1$ при $f^{\text{кр}} = \dfrac{F^{vac}\, p_F^{\text{кр}} M}{\pi^2} \approx -6$ ($\rho_0^{\text{кр}}$ – плотность системы, при которой $\lambda_0 = 1$, $\rho_0^{\text{кр}} = (p_F^{\text{кр}})^3/3\pi^2$).

Пусть основное состояние системы конечных размеров имеет объемную плотность $\rho_0 < \rho_0^{\text{кр}}$. Тогда поверхностные колебания лежат высоко, интегралы $(v_0\delta\rho)$ и $(v_0\delta_0\rho)$ одного порядка, система ведет себя как газ и добавленные частицы "садятся" в объем, увеличивая ρ_0. Это продолжается до тех пор, пока ρ_0 не станет настолько близким к $\rho_0^{\text{кр}}$, что отношение $\kappa = (v_0\delta\rho)/(v_0\delta_0\rho)$ сделается порядка $A^{1/3}$. Тогда при добавлении частиц, объемная плотность ρ_0 перестает расти – главное изменение $\delta\rho$ будет происходить на поверхности системы, т. е. в окрестности $\rho_0^{\text{кр}}$ система будет вести себя как жидкость. Частоты коллективных возбуждений с $l \neq 0$ лежат тогда рядом с $\omega_0 \sim \epsilon_F A^{-1/3}$ образуют вращательную полосу $\omega_l^2 = \omega_0^2 + \beta\dfrac{l(l+1)}{A}$.

По-видимому, при некоторых условиях система может иметь плотность $\rho_0 > \rho_0^{кр}$. Тогда поверхностное распределение частиц должно перестраиваться так, чтобы ω_0 не обращалось в нуль. Одно из возможных проявлений этой перестройки – возникновение поверхностного спаривания типа частица-дырка. Эта проблема будет рассмотрена отдельно.

В заключение автор приносит глубокую благодарность А.Б.Мигдалу, В.М.Галицкому, Р.О.Зайцеву, В.М.Осадчиеву, Э.Е.Саперштейну, М.А.Троицкому и С.А.Фаянсу за плодотворное обсуждение.

Поступила в редакцию
14 июля 1972 г.

Литература

[1] V.M.Osadtshiev. M.A. Troitsky. Phys. Lett., 26B, 421, 1968.

[2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Механика сплошных сред. Изд. ТТЛ, 1953.

[3] А.Б.Мигдал. Теория конечных ферми-систем и свойства атомных ядер. М., изд. Наука, 1965.

[4] W. Kohn, L.Sham. Phys. Rev., 137A, 1697, 1964.

$$S = \left(1 - \frac{i}{2}K\right) / \left(1 + \frac{i}{2}K\right). \qquad (1)$$