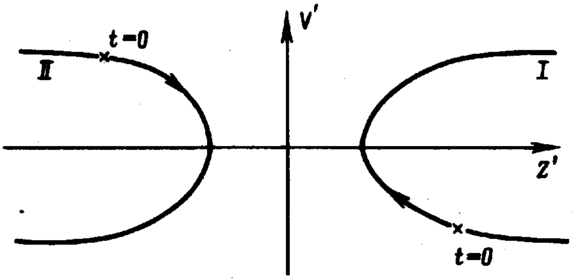
Письма в ЖЭТФ, том 16, вып. 8, стр. 487 – 491　　　*20 октября 1972 г.*

О ЗАТУХАНИИ СОЛИТОНА В ПЛАЗМЕ

В.Д.Шапиро, В.И.Шевченко

В настоящей статье исследуется адиабатическое затухание солитона, обусловленное поглощением его энергии резонансными частицами плазмы. Согласно [1], диссипация энергии солитона при таком взаимодействии является одним из механизмов, приводящих к образованию бесстолкновительной ударной волны.

Диссипация связана, в основном, с частицами, отражающимися от "горба" потенциальной энергии в солитоне. Фазовые траектории этих частиц в системе отсчета волны $v' = v - v_ф$, $z' = z - \int_0^t v_ф dt$ показаны на рисунке. На траекториях I частицы движутся в ускоряющей фазе поля, на траекториях II – в тормозящей фазе. При $\partial f_0 / \partial v_ф < 0$ ($f_0(v)$ – равновесная функция распределения плазмы) частиц, находящихся в ускоряющей фазе, больше, и солитон затухает. Нелинейная стабилизация затухания, обусловленная фазовыми колебаниями резонансных частиц [2, 3], отсутствует для отраженных частиц, и за счет взаимодействия с такими частицами амплитуда солитона затухает до нуля. При $\partial f_0 / \partial v_ф > 0$, т. е. при наличии пучка в плазме, взаимодействие с отраженными частицами приводит к усилению солитона. Амплитуда потенциала в солитоне возрастает в этом случае до значений $e|\phi|^{max} \sim m_e v_ф (v_0 - v_ф)$ (v_0 – скорость пучка) существенно бóльших, чем для монохроматической волны.



Рассмотрим сначала затухание высокочастотного ленгмюровского солитона. Такой солитон возникает в замагниченной плазме ($\omega_{He} >> \omega_{pe}$, ω_{He}, ω_{pe} – соответственно циклотронная и плазменная электронные частоты) в том случае, когда волна распространяется под углом к магнитному полю ($k_\perp \neq 0$) с фазовой скоростью $v_ф > (\omega_{pe} / k_\perp)$ [4, 5]. Полагая $v_ф = (\omega_{pe} / k_\perp)(1 + \delta)$, $\delta << 1$, ограничимся рассмотрением солитона малой амплитуды ($e|\phi|^{max} / m_e v_ф^2) << 1$. В этом приближении уравнение для потенциала ленгмюровской волны $\phi(t, x, z')$ (штрих, в дальнейшем, для удобства записи будем опускать) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + k_\perp^2 \phi = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{v_ф^2} \delta \phi + \frac{3}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{v_ф^2} \frac{e\phi^2}{m_e v_ф^2} -$$

$$- 2 \frac{\omega_{pe}^2}{v_ф^3} \int_{-\infty}^{z} \frac{\partial \phi}{\partial t} dz' + 4\pi e n_{res} . \qquad (1)$$

Два последних слагаемых в (1) описывают медленное изменение параметров солитона при его взаимодействии с резонансными частицами, n_{res} – возмущение плотности резонансных электронов в волне. Все малые $\lesssim \delta$ перенесены в правую часть уравнения (1). Решение этого уравнения ищем путем разложения по параметру δ : $\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \ldots$ В нулевом приближении имеем

$$\phi^{(0)} = \psi(z,t)\cos k_\perp x\,. \tag{2}$$

Мы выбрали решение, удовлетворяющее условию $\phi(-x) = \phi(x)$. Спектр $k_\perp$ определяется из граничных условий при $x = \pm a$. Так, если волна распространяется в волноводе с проводящими стенками $\phi(\pm a) = 0$, $k_\perp a = \frac{\pi(2n+1)}{2}$, $n = 0, 1 \ldots$ В дальнейшем рассматривается первая мода с $n = 0$. Уравнение для $\psi(z,t)$, как обычно, получается из условия ортогональности правой части (1) к $\phi^{(0)}(x)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{v_\phi^2}\delta\psi - \frac{4}{\pi}\frac{\omega_{pe}^2}{v_\phi^2}\frac{e\psi^2}{m_e v_\phi^2} + \frac{2\omega_{pe}^2}{v_\phi^3}\int_{-\infty}^{z}\frac{\partial\psi}{dt}dz' -$$

$$- \frac{4\pi e}{a}\int_{-a}^{a} n_{res}\cos k_\perp x\,dx = 0\,. \tag{3}$$

При выполнении условия $\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right| \ll \delta v_\phi \left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|$ уравнение (3) имеет решение в форме солитона:

$$\frac{e\psi(z,t)}{m_e v_\phi^2} = -a(t)\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{z}{\Delta(t)}\,,\qquad \Delta = \sqrt{\frac{3\pi}{2a}}\,\frac{v_\phi}{\omega_{pe}}\,,\qquad a = \frac{3\pi}{8}\delta\,. \tag{4}$$

Зависимость $a(t)$ определяется из уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\int_{-\infty}^{z}dz'\,\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{2\pi e v_\phi^3}{\omega_{pe}^2 a}\int_{-\infty}^{\infty}dz\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\int_{-a}^{a}dx\cos k_\perp x\ \times$$

$$\times\int dv\, f_{res}(t, z, x, v)\,. \tag{5}$$

$f_{res}(t, x, z, v)$ – функция распределения резонансных частиц. Правую часть уравнения (5) преобразуем, используя теорему Лиувилля о сохранении фазового объема $dz\,dv = dz_0\,dv_0$ [1)] и условие постоянства функции распределения на траекториях частиц $f(t, x, z, v) = f_0(v_0 + v_\phi)$. Уравнения для траекторий резонансных частиц в поле солитона имеют вид: $u = u_0 \pm \sqrt{2\mathcal{E}/m_e}\;t/\Delta$, знак $\pm$ соответствует частицам с $v_0 > 0$ и $v_0 < 0$; u связано с z соотношениями:

$$\mathrm{sh}\frac{z}{\Delta} = \mu\,\mathrm{sh}\,u\,,\quad \mu^2 = \frac{\mathcal{E} + e\phi_0}{\mathcal{E}}\,,\quad \phi_0 = \phi(z=0) = -a\frac{mv_\phi^2}{e}\cos k_\perp x$$

для пролетных частиц с энергией $\mathcal{E} > -e\phi_0$,

---

1) z_0, v_0 – начальные координаты частицы на фазовой траектории, проходящей в момент времени t через точку z, v.

$$\operatorname{sh}\frac{z}{\Delta} = \tilde{\mu}\operatorname{ch} u\,, \quad \tilde{\mu}^2 \doteq -\frac{\mathcal{E} + e\phi_0}{\mathcal{E}}$$

для отраженных частиц, т. е. при $\mathcal{E} < -e\phi_0$. Из (5) имеем следующее уравнение для $a(t)$:

$$\frac{da}{dt} = -4\sqrt{\frac{2}{3\pi^3}}\,\frac{\omega_{pe}}{m_e n_0}\,\frac{\partial f_0}{\partial v_ф}\,a^{1/2}\int_0^{\pi/2} d\xi_0 \cos\xi_0 \left\{\int_{-e\phi_0}^{\infty} d\mathcal{E}\,\mu^2 \times\right.$$

$$\times \sum_{j=\pm 1} j\int_0^{\infty} du_0\,\frac{\operatorname{ch} u_0}{(1+\mu^2 \operatorname{sh}^2 u_0)^{1/2}}\,\frac{\operatorname{sh}\left(u_0 + j\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_e}}\,\frac{t}{\Delta}\right)}{\left[1+\mu^2\operatorname{sh}^2\left(u_0 + j\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_e}}\,\frac{t}{\Delta}\right)\right]^{3/2}} +$$

$$\left. + \int_0^{-e\phi_0} d\mathcal{E}\,\tilde{\mu}^2 \sum_{j=\pm 1} j\int_0^{\infty} du_0\,\frac{\operatorname{sh} u_0}{(1+\tilde{\mu}^2\operatorname{ch}^2 u_0)^{1/2}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(u_0 + j\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_e}}\,\frac{t}{\Delta}\right)}{\left[1+\tilde{\mu}^2\operatorname{ch}^2\left(u_0 + j\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m_e}}\,\frac{t}{\Delta}\right)\right]^{3/2}}\right\} \tag{6}$$

При получении этого уравнения мы представили равновесную функцию распределения резонансных частиц в виде $f_0(v_ф + v_0) = f_0(v_ф) + v_0\,\partial f_0/\partial v_ф$ и исключили интеграл по $z_0 < 0$ с помощью условия $z(-z_0, -v_0, t) = -z(z_0, v_0, t)$. При временах t, больших по сравнению с временем пролета частиц через солитон, $t \gg \left(\frac{\Delta}{v_ф}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, в (6) существенен только вклад отраженных частиц с $v_0 < 0$. Тогда из (6) имеем простое уравнение

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{2}{3\pi}}\,\frac{\omega_{pe}}{n_0}\,v_ф^2\,\frac{\partial f_0}{\partial v_ф}\,a^{3/2}\,, \tag{7}$$

решение которого

$$a(t) = \frac{a(0)}{\left(1+\sqrt{\frac{a(0)}{6\pi}}\,\gamma_L t\right)^2}\,, \qquad \gamma_L = -\frac{\omega_{pe}}{n_0}\,v_ф^2\,\frac{\partial f_0}{\partial v_ф} \tag{8}$$

описывает затухание ленгмюровского солитона в результате взаимодействия с отраженными частицами.

В неизотермической плазме $T_e \gg T_i$ возможен низкочастотный ионно-звуковой солитон [6]. В таком солитоне, в отличие от рассмотренного выше, $\phi > 0$, и затухание солитона происходит за счет ионов, отражающихся от "горба" потенциала. Для солитона достаточно малой амплитуды $a_s = \frac{e\phi^{max}}{m_i v_ф^2} \ll 1$ декремент затухания за счет отраженных частиц $\gamma_i(t)$ вычисляется аналогично тому, как выше это сделано для ленгмюровского солитона.

Резонансные электроны захватываются в потенциальную яму, созданную ионно-звуковым солитоном. Фазовое "размешивание" захваченных частиц приводит к тому, что при временах $t \gg 1/\omega_{pe} a_s$, т. е. достаточно быстро, электронный декремент затухания уменьшается до значения

$$\gamma_e^{\infty} \approx \gamma_i \sqrt{a_s} \ll \gamma_i .$$

Наличие γ_e^{∞} связано с адиабатической перестройкой электронных траекторий в поле солитона с изменяющейся во времени амплитудой. Электроны таким образом не влияют существенно на затухание солитона.

Учет затухания за счет отраженных ионов приводит при временах $t \gg \dfrac{1}{\omega_{pi}\, a_s}$ к следующей формуле для амплитуды ионно-звукового солитона:

$$a_s(t) = \frac{a_s(0)}{\left(1 + \sqrt{\dfrac{a_s(0)}{24}}\,\gamma_s t\right)^2}, \qquad \gamma_s = -\frac{\omega_{pi}}{n_0} v_\Phi^2 \frac{\partial f_{oi}}{\partial v_\Phi} \tag{9}$$

$f_{oi}(v)$ – равновесная функция распределения ионов, $\omega_{pi} = \sqrt{\dfrac{m_e}{m_i}}\,\omega_{pe}$.

Авторы благодарны Р.З.Сагдееву за ценные советы и обсуждение результатов настоящей работы.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
2 сентября 1972 г.

Литература

[1] Р.З.Сагдеев. Сб. Вопросы теории плазмы, М., Атомиздат, 4, 20, 1964.

[2] Р.К.Мазитов. ПМТФ, вып 1, 27, 1965.

[3] Th. O'Neil. Phys. Fl., 8, 2255, 1965.

[4] H.I.Kezi, P.J.Barrett, R.B.White, A.Y.Wong. Phys. Fl., 14, 1997, 1971.

[5] Б.Н.Руткевич, А.В.Пащенко, В.Д.Федорченко, В.Н.Муратов. ЖТФ, 42, 493, 1972.

[6] А.А.Веденов, Е.П.Велихов, Р.З.Сагдеев. Ядерный синтез, 1, 82, 1961.