Письма в ЖЭТФ, том 18, вып. 10, стр. 650 – 654 *20 ноября 1973 г.*

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ ПАРТОННОЙ МОДЕЛИ

И. С. Шапиро

Показывается, что скейлинг сечений глубоко неупругих процессов означает локализованность партонов в трехмерном эвклидовом r-пространстве, фурье-сопряженном быстротам. Выход на скейлинг определяется видом волновой функции адрона в этом пространстве.

1. В импульсном представлении шредингеровская волновая функция адрона

$$\phi_n(k_1\epsilon_1; \ldots k_n\epsilon_n; M)$$

зависит от импульсов k_i и энергий ϵ_i партонов, причем

$$\epsilon_i \equiv \sqrt{k_i^2 + m_i^2}$$

где m_i – масса партона. Импульс адрона равен сумме импульсов партонов, а его масса M удовлетворяет неравенству

$$M < \sum_{i=1}^{n} m_i ,$$

выражающему невозможность распада свободного адрона на партоны. Поскольку речь идет о связанном состоянии, волновые функции ϕ_n следует считать квадратично-интегрируемыми. Релятивистски инвариантная норма определяется интегралом

$$\int |\phi_n|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{dk_i}{\epsilon_i} < \infty .$$

Физическая природа партонов для дальнейшего не имеет существенного значения. При желании, можно подразумевать под партонами кварки. Можно интерпретировать ϕ_n просто как компоненты фоковского вектора состояния системы квантовых полей. В этом случае роль партонов могут играть любые достаточно тяжелые и короткоживущие частицы. В данной статье спин партона будет считаться равным нулю. Это ограничение не принципиально и принято исключительно для упрощения формул.

При лоренцевых преобразованиях g функции ϕ_n преобразуются по некоторому представлению T_g за счет сдвига аргументов. Это представление приводимо и унитарно, так как релятивистски-инвариантная норма функций ϕ_n положительно определена. Унитарны и неприводимые представления, содержащиеся в T_g (напомним, что из-за некомпактности группы Лоренца, все они бесконечномерны). Согласно работам [1, 2], разложение гильбертова пространства функций ϕ_n на неприводимых в отношении группы Лоренца части, осуществляется следующими интегральными преобразованиями (мы используем обозначения, введенные в статье [3]):

$$\phi(k, \epsilon) = (2\pi)^{-3/2} \int \xi(k, r)\psi(r)\, dr , \tag{1}$$

$$\psi(r) = m(2\pi)^{-3/2} \int \xi^*(k, r)\, \phi(k, \epsilon) \frac{dk}{\epsilon} \quad . \qquad (2)$$

Здесь

$$\xi(k, r) = \left(\frac{\epsilon - kn}{m}\right)^{-1+mr}, \qquad n \equiv r/r. \qquad (3)$$

Базисные функции ξ ортогональны и нормированы на дельта-функции, так что

$$\int |\psi|^2 dr = \int |\phi|^2 \frac{dk}{\epsilon}.$$

Мы привели, для краткости, формулы для функций ϕ от одного векторного аргумента. Соответствующие выражения для функций ϕ_n получаются n-кратным применением формул (1) и (2). Функция $\psi(r)$ преобразуется по неприводимому унитарному представлению группы Лоренца. При этом угловой аргумент n испытывает сдвиг, модуль r остается неизменным, а вся функция приобретает множитель

$$\psi'(r') = \xi^*(P, r')\,\psi(u_\beta^{-1} r'), \qquad r' = r. \qquad (4)$$

Здесь P – импульс партона, имеющего скорость β (считаем, что новая система движется со скоростью $-\beta$), а u_β – матрица поворота, связывающая векторы n' и n:

$$n' = u_\beta n \quad .$$

Этот поворот равен аберрации светового луча: n' параллелен направлению световой волны, распространявшейся в исходной системе вдоль n. Из закона преобразования (4) следует, что если в системе покоя адрона выделена угловая часть функции $\psi(r)$, то вся информация о динамике взаимодействия партонов, сосредоточенная в радиальных функциях, переводится в любую лоренцеву систему отсчета почти так же, как при вращениях, поскольку радиальные переменные r лоренц-инвариантны, а множители ξ^* не зависят от вида ψ-функции. Иное положение имеет место для волновых функций ϕ в импульсном представлении: выделение угловой части в какой-либо системе отсчета мало что меняет (в смысле определенности трансформационных свойств), так как при лоренцевых преобразованиях изменяются абсолютные величины импульсов. Можно сказать, что переходом к r-представлению достигается максимальное разделение кинематических динамических характеристик системы релятивистских частиц, описываемых волновой функцией.

2. Укажем еще одно важное свойство r-представления, впервые отмеченное в работе [3]: в нерелятивистском пределе ($k/m \ll 1$) формулы (1), (2) переходят в интегралы Фурье, и, следовательно, r превращается в обычный радиус-вектор точки. В общем же случае r-пространство фурье-сопряжено быстротам. Это проще всего увидеть, если принять, что в системе покоя адрона все партоны имеют нулевые орбитальные моменты. Тогда ψ-функция в указанной системе будет зависеть только от радиальных переменных, и в формуле (1) легко выпол-

нить угловое интегрирование. Оно дает

$$\phi\ (k,\ \epsilon) = \frac{1}{\operatorname{sh}\eta_k}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin\eta_k r\ \chi(r)\ dr\ . \tag{5}$$

Мы положили здесь $m = 1$, $\chi(r) = r\,\psi(r)$ и обозначили через η_k быстроту партона с импульсом k:

$$\eta_k = \frac{1}{2}\ln\frac{\epsilon + k}{\epsilon - k}\ .$$

Используя закон преобразования (4) и теорему сложения для базисных функций ξ (см. статью [2]), можно показать, что в системе отсчета, в которой адрон движется со скоростью β, получится аналогичное соотношение, отличающееся от формулы (5) заменой η_k на η, где η определяется равенством

$$\operatorname{ch}\eta = \epsilon(P^2 + 1)^{1/2} - kP. \tag{6}$$

Положим

$$k = xP + k_t\ ,\qquad k_t P = 0$$

и примем, что

$$0 < x < 1,\qquad xP >> 1,\qquad k_t\ . \tag{7}$$

Тогда

$$\eta \approx \eta_0 + 0(P^{-2}) \approx \eta_p - \eta_k\ , \tag{8}$$

где

$$\eta_0 = \operatorname{arc\,ch}\frac{x^2 + k_t^2 + 1}{2x} \tag{9}$$

и η_p – быстрота адрона со скоростью β. Из формул (8) и (9) следует, что при $P \to \infty$ величины η перестают зависеть от P. При больших, но конечных P опустить $0\ (P^{-2})$ под знаком интеграла в формуле (5) можно в том случае, если эффективный интервал интегрирования конечен и достаточно мал. Если последнее имеет место, то распределение партонов по x и k_t не зависит от P. Хорошо известно (см. например, ссылки [4, 5]), что это обуславливает масштабную инвариантность сечений глубоко неупругих процессов взаимодействия лептонов с адронами. Количественные критерии "выхода на скейлинг", кроме кинематических условий (7), должны содержать размеры партона в r-пространстве (точнее, моменты $< r^n >$).

3. Выше рассматривались бесспиновые партоны в s-состояниях[1]. Изложенное остается справедливым и для партонов со спином и с от-

---

[1] По завершении данной работы автору стало известно, что аналогичные фурье-преобразования по быстротам рассматривались независимо Я.А.Смородинским.

личными от нуля орбитальными моментами (укажем, что формулы для частиц со спином, аналогичные (1) и (2), получены в работах [6, 7]; полезный аппарат для вычислений в r-представлении развит в работах [3, 8 – 10]).

В данной статье не обсуждался вопрос о спектре и множественности пионов, рождающихся в глубоко неупругом рассеянии. Отметим, что распределение пионов по быстротам также должно характеризоваться скейлинговыми свойствами, аналогичными тем, которые следуют из формул (5) – (9). Это обусловлено конечностью размера партона в r-пространстве (подобно тому, как скейлинговое распределение партонов, является следствием ограниченности размера адрона-мишени). Более сложна проблема множественности. Она не может быть решена без привлечения дополнительных гипотез. Поскольку r-пространство фурье-сопряжено быстротам, ясно, что простейшие модели для ψ-функций будут приводить к логарифмической связи множественности с переданной энергией. В частности, в рамках подобного подхода весьма естественным представляется рост множественности как степени (предпочтительно третьей) логарифма энергии, переданной в глубоко неупругом процессе. Эти вопросы, а также упомянутое распространение формулы (5) на случай партонов с отличным от нуля спином предполагается рассмотреть в других публикациях.

В заключение подчеркнем, что r-пространство по ряду свойств схоже с пространством обычных координат и это может быть полезным как с эвристической точки зрения, так и для упрощения формализма. В частности, различные варианты выхода на скейлинг или поведения сечений в краевой области малых значений x („wee"-партоны) могут свестись в рамках r-представления к сравнительно простой параметризации ψ-функции (ее асимптотики или поведения в нуле). Новые возможности открывает использование r-представления и в теории столкновения ядер, движущихся с релятивистскими скоростями.

Автор признателен Л.А.Кондратюку и Е.Л.Фейнбергу за полезные замечания.

Институт теоретической
и экспериментальной физики

Поступила в редакцию
12 октября 1973 г.

Литература

[1] И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647, 1956.

[2] И.С.Шапиро. Phys. Lett., 1, 253, 1962.

[3] В.Г.Кадышевский. Nucl. Phys., B6, 125, 1968.

[4] R.P.Feynman. "Photon Hadron Interactions", W.A.Benjamin Company, 1972.

[5] В.Н.Грибов. "Пространственно-временное описание взаимодействия адронов при высоких энергиях". Сб. "Элементарные частицы", М., Атомиздат, 1973.

[6] Чжоу-Гуан-Чжао, Л.Г.Заставенко. ЖЭТФ, 35, 1417, 1958.

[7] В.С.Попов. ЖЭТФ, 37, 1116, 1959.

[8] В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. Nuovo Cim., 55A, 1233, 1968.

[9] В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. ЯФ, 9, 219, 1969.

[10] В.Г.Кадышевский, А.Н.Тавхелидзе. "Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче трех тел". Сб. "Проблемы теоретической физики", М., изд. Наука, 1969.