ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИЛОЖЕНИЯХ ГИПОТЕЗЫ ЧАСТИЧНО СОХРАНЯЮЩЕГОСЯ АКСИАЛЬНО-ВЕКТОРНОГО ТОКА

М.Бейкер *)

За последние месяцы написано много работ о новых следствиях из гелл-манновской спиральной алгебры токов $SU(3) \times SU(3)$ [1]. Чтобы получить результаты, которые можно непосредственно сравнить с экспериментом, были сделаны следующие две дополнительные гипотезы:

А. Дивергенция аксиально-векторного тока пропорциональна полю.

$$\partial^{\mu} J_{\mu}^{A}(x) = -i\, C\, \varphi(x), \tag{A}$$

где $J_{\mu}^{A}(x)$ является аксиально-векторным током с $\Delta S=0$, а $\varphi(x)$- перенормированное гейзенберговское поле π- мезона (эту гипотезу кратко называют PCAC).

Б. Предполагается, что некоторые амплитуды являются медленно меняющимися функциями пионного 4-мерного импульса k в области между $k=0$ и $k=\mu$, где μ- масса π-мезона.

Цель этой заметки состоит в том, чтобы отметить, что операторное равенство А (PCAC) фактически никогда не использовалось в упомянутых работах. Мы покажем, что если гипотеза Б справедлива, то предсказания этих работ правильны, независимо от того, верна или нет гипотеза А (или даже - верна ли эта гипотеза приблизительно). Если же предположение Б несправедливо, тогда предсказания также неверны, даже если гипотеза А правильна.

В упомянутых работах гипотеза А (PCAC) использовалась следующим образом. Рассматривался матричный элемент некоторого локального оператора $\theta(x)$ вида $\langle A^{in}|\theta(x)|\pi(\vec{k})B^{out}$, где $|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle$-произ-

---

*) Стипендиант фонда А.П.Слоан.

вольное состояние, содержащее π-мезон с импульсом $\vec{k}$. Формула приведения Лемана-Шиманчика-Циммермана позволяет представить его в виде

$$\sqrt{2k^0}\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle = i\int d^4y e^{iky}\left(\overrightarrow{-\partial^2+\mu^2}\right)_y \times$$
$$\times\langle A^{in}|T\left(\mathcal{O}(x)\varphi(y)\right)|B^{out}\rangle, \qquad (I)$$

где $\varphi(y)$ - перенормированное гейзенберговское поле π-мезона, $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}$. Применение гипотезы А дает

$$\sqrt{2k^0}\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})\,B^{out}\rangle =$$
$$= -\frac{1}{c}\int d^4y e^{iky}\left(\overrightarrow{-\partial^2+\mu^2}\right)_y \langle A^{in}|T\left(\mathcal{O}(x),\partial^\mu J^A_\mu(y)\right)|B^{out}\rangle. \qquad (2)$$

Если предположить здесь (гипотеза Б), что выражение в правой части уравнения (2) является медленно меняющейся функцией k, то оно может быть аппроксимировано по его величине при $k = 0$. Последнее может быть вычислено путем использования алгебры токов. Поэтому PCAC использовано здесь лишь для получения равенства (2).

Покажем, что уравнение (2) вообще справедливо без всяких дополнительных гипотез типа PCAC, если константа C выбрана равной $\mu^2 f_\pi$, где f_π отлично от нуля, определяется уравнением

$$\langle 0|\partial^\mu J^A_\mu(0)|\pi(\vec{k})\rangle = -\frac{i\mu^2 f_\pi}{\sqrt{2k^0}} \qquad (3)$$

и является амплитудой распада $\pi \to \mu + \nu$.

Прежде чем это показать, дадим краткий вывод формулы (I), с тем чтобы подчеркнуть, что единственным свойством поля $\varphi(x)$, которое используется для получения (I), является то, что оно удовлетворяет асимптотическому условию, определенному ниже.

Определим оператор

$$a_{\vec{k}}(t) \equiv \int d^3x e^{-ikx}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\,\varphi(x), \qquad (4)$$

где

$$i\overleftrightarrow{\partial_0} \equiv i\overrightarrow{\partial_0} - i\overleftarrow{\partial_0}$$

и
$$k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}.$$

Тогда асимптотическое условие означает, что

$$\lim_{t \to -\infty} a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}}^{out}, \tag{5}$$

и

$$\lim_{t \to +\infty} a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}}^{in},$$

где $a_{\vec{k}}^{in+}$ и $a_{\vec{k}}^{out+}$ -операторы рождения физических однопионных состояний с импульсом $\vec{k}$. Например,

$$\left|\pi(\vec{k}) B^{out}\right\rangle = a_{\vec{k}}^{out+} \left|B^{out}\right\rangle,$$

и (6)

$$\left\langle A^{in}\right| a_{\vec{k}}^{in+} = 0,$$

поскольку $\left\langle A^{in}\right|$ не содержит пиона в состоянии с импульсом $\vec{k}$.

Чтобы показать, что (I) является прямым следствием асимптотического условия (5), нам нужно только использовать тождество

$$\begin{aligned} & a_{\vec{k}}^{+}(t_1)\, \mathcal{O}(y) - \mathcal{O}(y)\, a_{\vec{k}}^{+}(t_2) = \\ & = -i \int_{t_2}^{t_1} dx^0 \int d^3x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2k^0}} \left(\overleftrightarrow{-\partial^2 + \mu^2}\right)_x T\left(\mathcal{O}(y)\, \varphi(x)\right) \end{aligned} \tag{7}$$

при $t_1 > y^0 > t_2$.

Оно получается при интегрировании по частям и использовании определения (4) оператора $a_{\vec{k}}(t)$.

Рассмотрим матричный элемент от обеих частей уравнения (7) между состояниями $\left\langle A^{in}\right|$ и $\left|B^{out}\right\rangle$ и устремим $t_1 \to +\infty$ и $t_2 \to -\infty$. Используя асимптотическое условие (5) и свойства (6) операторов $a_{\vec{k}}^{in+}$ и $a_{\vec{k}}^{out+}$, мы приходим к уравнению (I). Отметим, что из приведенного вывода следует, что справедливость уравнения (I) не зависит от вида уравнений движения или перестановочных соотношений, которым удовлетворяет φ.

Рассмотрим теперь любой локальный оператор $\tilde{\varphi}(x)$, для которого матричный элемент $\left\langle 0\right| \tilde{\varphi}(x) \left|\pi(\vec{k})\right\rangle$ не обращается в нуль. Тогда из релятивистской инвариантности следует, что

$$\left\langle 0\right| \tilde{\varphi}(0) \left|\pi(\vec{k})\right\rangle = \gamma / \sqrt{2k^0}, \tag{8}$$

где γ - некоторая, не равная нулю, константа.

Тогда, если определить

$$\tilde{a}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\gamma}\int \frac{d^3x}{\sqrt{2k^0}}\, e^{-ikx}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\, \tilde{\varphi}(x) \qquad (4')$$

то, как показал Хааг [2],

$$\lim_{t\to-\infty} \tilde{a}_{\vec{k}}(t) = a^{out}_{\vec{k}},$$
$$\lim_{t\to+\infty} \tilde{a}_{\vec{k}}(t) = a^{in}_{\vec{k}}. \qquad (5')$$

Таким образом, асимптотически оператор $\tilde{a}_{\vec{k}}(t)^+$ так же, как и $a^+_{\vec{k}}(t)$, является оператором рождения физического однопионного состояния с импульсом $\vec{k}$. Иными словами, оператор $\tilde{\varphi}(x)/\gamma$ удовлетворяет асимптотическому условию.

Используя уравнения (4′) и (5′) вместо (4) и (5), повторим вывод уравнения (I), описанный выше, с заменой $\varphi(x)\to\tilde{\varphi}(x)/\gamma$, $a_{\vec{k}}(t)\to\tilde{a}_{\vec{k}}(t)$.

Вместо уравнения (I) мы получим при этом следующее выражение для $\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle$:

$$\sqrt{2k^0}\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle =$$
$$= i/\gamma\int d^4y\, e^{iky}\left(\overrightarrow{-\partial^2+\mu^2}\right)_y \langle A^{in}|T\left(\mathcal{O}(x)\,\tilde{\varphi}(y)\right)|B^{out}\rangle, \qquad (I')$$

где $k^0=\sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}$. Конечно, правая часть уравнения (I) и уравнения (I′) равны только для $k^2=-\mu^2$.

Удобно (и в силу (3) возможно) выбрать

$$\tilde{\varphi}(x) = \partial^\mu J^A_\mu(x). \qquad (9)$$

Сравнивая уравнение (3) с (8), находим при указанном выборе $\tilde{\varphi}(x)$

$$\gamma = -i\mu^2 f_\pi, \qquad (10)$$

и уравнение (I′) совпадает с (2) при $C=\mu^2 f_\pi$. Таким образом, уравнение (2) с $C=\mu^2 f_\pi$ является точным и всегда справедливым. Не было

и
$$k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}\,.$$

Тогда асимптотическое условие означает, что

$$\lim_{t\to-\infty} a_{\vec{k}}^{(t)} = a_{\vec{k}}^{out}\,, \tag{5}$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} a_{\vec{k}}(t) = a_{\vec{k}}^{in}\,,$$

где $a_{\vec{k}}^{in+}$ и $a_{\vec{k}}^{out+}$ -операторы рождения физических однопионных состояний с импульсом $\vec{k}$. Например,

$$\left|\pi(\vec{k})B^{out}\right\rangle = a_{\vec{k}}^{out+}\left|B^{out}\right\rangle,$$

и

$$\left\langle A^{in}\right| a_{\vec{k}}^{in+} = 0, \tag{6}$$

поскольку $\left\langle A^{in}\right|$ не содержит пиона в состоянии с импульсом $\vec{k}$.

Чтобы показать, что (I) является прямым следствием асимптотического условия (5) , нам нужно только использовать тождество

$$a_{\vec{k}}^{+}(t_1)\,\mathcal{O}(y) - \mathcal{O}(y)\,a_{\vec{k}}^{+}(t_2) = -i\int_{t_2}^{t_1} dx^0 \int d^3x \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2k^0}} \left(\overrightarrow{-\partial^2+\mu^2}\right)_x T\left(\mathcal{O}(y)\,\varphi(x)\right) \tag{7}$$

при $t_1 > y^0 > t_2$.

Оно получается при интегрировании по частям и использовании определения (4) оператора $a_{\vec{k}}(t)$.

Рассмотрим матричный элемент от обеих частей уравнения (7) между состояниями $\left\langle A^{in}\right|$ и $\left|B^{out}\right\rangle$ и устремим $t_1 \to +\infty$ и $t_2 \to -\infty$. Используя асимптотическое условие (5) и свойства (6) операторов $a_{\vec{k}}^{in+}$ и $a_{\vec{k}}^{out+}$, мы приходим к уравнению (I). Отметим, что из приведенного вывода следует, что справедливость уравнения (I) не зависит от вида уравнений движения или перестановочных соотношений, которым удовлетворяет φ .

Рассмотрим теперь любой локальный оператор $\tilde{\varphi}(x)$, для которого матричный элемент $\left\langle 0\right|\tilde{\varphi}(x)\left|\pi(\vec{k})\right\rangle$ не обращается в нуль. Тогда из релятивистской инвариантности следует, что

$$\left\langle 0\right|\tilde{\varphi}(0)\left|\pi(\vec{k})\right\rangle = \gamma/\sqrt{2k^0}\,, \tag{8}$$

где γ - некоторая, не равная нулю, константа.

Тогда, если определить

$$\tilde{a}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{\gamma}\int \frac{d^3x}{\sqrt{2k^0}}\, e^{-ikx}\, i\overleftrightarrow{\partial_0}\, \tilde{\varphi}(x) \qquad (4')$$

то, как показал Хааг [2],

$$\lim_{t\to-\infty} \tilde{a}_{\vec{k}}(t) = a^{out}_{\vec{k}}, \qquad \lim_{t\to+\infty} \tilde{a}_{\vec{k}}(t) = a^{in}_{\vec{k}}. \qquad (5')$$

Таким образом, асимптотически оператор $\tilde{a}_{\vec{k}}(t)^+$ так же, как и $a^+_{\vec{k}}(t)$, является оператором рождения физического однопионного состояния с импульсом $\vec{k}$. Иными словами, оператор $\tilde{\varphi}(x)/\gamma$ удовлетворяет асимптотическому условию.

Используя уравнения $(4')$ и $(5')$ вместо (4) и (5), повторим вывод уравнения (I), описанный выше, с заменой $\varphi(x) \to \tilde{\varphi}(x)/\gamma$, $a_{\vec{k}}(t) \to \tilde{a}_{\vec{k}}(t)$.

Вместо уравнения (I) мы получим при этом следующее выражение для $\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle$:

$$\sqrt{2k^0}\langle A^{in}|\mathcal{O}(x)|\pi(\vec{k})B^{out}\rangle = \qquad (I')$$
$$= i/\gamma\int d^4y\, e^{iky}\left(\overrightarrow{-\partial^2+\mu^2}\right)_y \langle A^{in}|T\left(\mathcal{O}(x)\,\tilde{\varphi}(y)\right)|B^{out}\rangle,$$

где $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2+\mu^2}$. Конечно, правая часть уравнения (I) и уравнения (I') равны только для $k^2 = -\mu^2$.

Удобно (и в силу (3) возможно) выбрать

$$\tilde{\varphi}(x) = \partial^{\mu} J^A_{\mu}(x). \qquad (9)$$

Сравнивая уравнение (3) с (8), находим при указанном выборе $\tilde{\varphi}(x)$

$$\gamma = -i\mu^2 f_{\pi}, \qquad (10)$$

и уравнение (I') совпадает с (2) при $C = \mu^2 f_{\pi}$. Таким образом, уравнение (2) с $C = \mu^2 f_{\pi}$ является точным и всегда справедливым. Не было необходимости вводить перенормированное гейзенберговское пионное поле $\varphi(x)$ через (I), а затем удалять его при помощи PCAC. Это замечание довольно тривиально и хорошо известно [1]. Тем не менее, хочется отметить, что гипотеза о том, что дивергенция аксиально-векторного тока пропорциональна оператору пионного поля, появляется в литературе все чаще и чаще. Фактически же она вообще не нужна для получения результата (2).

Автор благодарен профессорам К.А.Тер-Мартиросяну, В.Я.Файнбергу, В.М.Шехтеру и Б.Л.Иоффе за интересные обсуждения, а также академикам И.Е.Тамму и И.Я.Померанчуку за гостеприимство, оказанное ему во время пребывания в Физическом институте им. П.Н.Лебедева и в Институте теоретической и экспериментальной физики.

Институт теоретической
и экспериментальной физики [2]

Поступило в редакцию
8 июня 1966 г.

Литература

[I] M.Suzuki. Phys. Rev. Lett., 15, 986, 1965; H.Sugawara. Phys. Rev. Lett., 15, 870, 1965; C.G.Callen, S.B.Treiman. Phys. Rev. Lett., 16, 212, 1966; K.Kawarabayashi, M.Suzuki. Phys. Rev. Lett., 16, 255, 1966; S.K.Bose, S.U.Biswas. Phys. Rev. Lett., 16, 330, 1966; Y.Hara, Y.Nambu, J.Schechter. Phys. Rev. Lett., 16, 380, 1966; U.S.Mathyr, S.Okubo, L.K.Pandit. Phys. Rev. Lett., 16, 371, 1966.

[2] R.Haag. Phys. Rev., II2, 669, 1958.

I) К.Нисидзима. Тр.междунар. конф. по слабым взаимодействиям, Аргоннская нац. лаборатория, 25-27 октября 1965 г., стр. 4I8.

2) По приглашению Академии наук СССР в соответствии с программой научного обмена между Национальной академией наук и Академией наук СССР.