РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В.Л.Инденбом, Э.М.Шефтер

Как известно, поле внутренних напряжений описывается уравнением

$$c_{ijkl} \, u_{k,jl} - \rho \, \ddot{u}_i = c_{ijkl} \, \varepsilon^0_{kl,j} \quad , \qquad (I)$$

где u_i - вектор смещения, c_{ijkl} - тензор упругих модулей, ρ - плотность материала, ε^0_{ij} - собственные деформации какого-либо происхождения (пластические, температурные, стрикционные, пьезодеформации и т.п.), служащие источником упругих деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) - \varepsilon^0_{ij} \qquad (2)$$

и соответствующих внутренних напряжений

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\ \varepsilon_{kl} \ . \qquad (3)$$

Обычно упругие деформации (2) оказываются при этом одного порядка с собственными деформациями. Аналогичные результаты были получены при многих попытках учета инерционных сил применительно к различным конкретным задачам (см. [I]).

Из уравнения (I) видно, что при надлежащем выборе даже слабых источников амплитуда волн внутренних напряжений может быть доведена до сколь угодно большой величины. Укажем несколько примеров подобного резонансного возбуждения поля внутренних напряжений, которые, в частности, могут быть реализованы с помощью современных методов облучения тел потоками электромагнитных волн.

а) Движение источников с звуковой и сверхзвуковой скоростью. По мере увеличения скорости источника внутренних напряжений, вызванное им упругое поле испытывает "Лоренцово" сокращение. Когда скорость источника достигает скорости звука, возникает резонанс и начинается излучение волн Маха, аналогичное излучению Черенкова. В простейшем случае изотропного источника ($\varepsilon^0_{ij} = \delta_{ij}\ \varepsilon^0$) в упруго-изотропной среде волновое уравнение приобретает вид:

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\ \ddot{\Phi} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\ \varepsilon^0 \ . \qquad (4)$$

Здесь Φ - потенциал смещений, c - скорость продольных волн. Для равномерно движущегося точечного источника решение выписывается по аналогии с известным решением для равномерно движущегося электрона.

Напряжения определяются дифференцированием потенциала смещений по (2 - 3).

При $v > c$ достигается совпадение фазы источника и волны; амплитуда напряжений неограниченно возрастает при приближении к образующей конуса излучения.

б) **Кумуляция волн при мгновенном включении поля.** Пусть в теле мгновенно возникает собственная деформация ε^{o}_{ij}. Поскольку мгновенное смещение точек тела невозможно, напряжения в начальный момент определяются соотношением $\sigma_{ij} = -c_{ijk\ell}\, \varepsilon^{o}_{k\ell}$. Если в облучаемой области $\varepsilon^{o}_{ij} = const$, то начальное ускорение точек на границе этой области (граница может частично или полностью совпадать со свободной поверхностью тела) описывается граничной δ- функцией.

В результате возникают две волны, распространяющиеся в разные стороны от границы облученной области. При надлежащем выборе формы этой области может произойти кумулятивное сжатие упругого поля с неограниченным возрастанием амплитуды напряжений. Применительно к практическим задачам интересен случай равномерного возбуждения цилиндра радиуса R. Решение уравнения (4) дает для оси цилиндра следующие напряжения:

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\varepsilon^{o} E}{1-2\nu} \quad \text{при } t < \frac{R}{c}. \tag{5}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\varepsilon^{o} E}{2(1-\nu)} \left[1 + \frac{1}{1-2\nu}\left(1 - \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}}\right)\right] \left(t > \frac{R}{c}\right) \tag{6}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\varepsilon^{o} E}{1-\nu} \left[1 + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(1 - \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}}\right)\right] \left(t > \frac{R}{c}\right) \tag{7}$$

Здесь ν - коэффициент Пуассона; E - модуль упругости Юнга. Амплитуда волн разгрузки в момент $t = \frac{R}{c}$ обращается в бесконечность. При $t \to \infty$ распределение напряжений стремится к известному статическому решению.

в) Д в и ж е н и е в о л н о в о г о п а к е т а. Пусть равномерно возбужденный полуограниченный цилиндр радиуса R движется со скоростью v вдоль своей оси. Решение уравнения (4) дает для оси цилиндра следующие напряжения:

при $\quad vt - z < \sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}\; R$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\varepsilon^0 E}{1-2\nu}\;\frac{1}{1-\frac{c^2}{v^2}}, \tag{8}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\varepsilon^0 E}{2(1-\nu)}\left[1+\frac{(1-2\nu)^{-1}-\frac{c^2}{v^2}}{1-\frac{c^2}{v^2}}\right], \tag{9}$$

при $\quad vt - z > \sqrt{\frac{v^2}{c^2}-1}\; R$

$$\sigma_{zz} = \frac{\varepsilon^0 E}{1-\nu}\left\{1+\left[\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)\cdot\left(1-\frac{c^2}{v^2}\right)^{-1}-1\right]\left[1-\frac{vt-z}{\sqrt{(vt-z)^2-\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)R^2}}\right]\right\}, \tag{10}$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\varepsilon^0 E}{2(1-\nu)}\left\{1+\frac{(1-2\nu)^{-1}-\frac{c^2}{v^2}}{1-\frac{c^2}{v^2}}\left(1-\frac{vt-z}{\sqrt{(vt-z)^2-\left(\frac{v^2}{c^2}-1\right)R^2}}\right)\right\}. \tag{11}$$

Кумуляция волны разгрузки происходит аналогично случаю (6) и соответствует пересечению поверхности конуса излучения.

На расстоянии r от оси цилиндра максимальные напряжения пропорциональны $\sqrt{\frac{R}{r}}$. Оценка по методу [2] показала, что кумуляция волны разгрузки может явиться причиной разрушения тел при лазерном облучении, когда часто наблюдается образование трещин на оси сравнительно широкого пучка, не вызывающего (в среднем) больших напряжений [3].

Институт кристаллографии
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
6 июля 1966 г.

Литература

[1]. Г.Паркус. "Неустановившиеся температурные напряжения", Физматгиз, М., 1963.

[2] В.Л.Инденбом. Физ.твердого тела, 3, 2071, 1961.

[3] Б.М.Амкинадзе, В.И.Владимиров и др. ЖЭТФ, 50, 1187, 1966.