КОМПЛЕКСЫ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ СПИНОВ В ЛИНЕЙНОЙ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ ЦЕПОЧКЕ

А.А.Овчинников

Как известно, гейзенберговский спиновый гамильтониан для линейной цепочки, с помощью канонического преобразования сводится к гамильтониану для решеточного одномерного ферми-газа без спина с взаимодействием только между соседями [1]. Искомый гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ a_{n+1} + a_{n+1}^+ a_n) + \gamma \sum_{n=1}^{N} a_n^+ a_n a_{n+1}^+ a_{n+1}, \qquad (1)$$

где: в виду цикличности цепочки для ферми-операторов a_n имеет место соотношение $a_{N+1} = a_1$. γ характеризует анизотропию исходного спинового гамильтониана. Закон сохранения числа частиц соответствует сохранению проекции z полного спина системы. Пусть имеется некоторое конечное число L спинов* . Определение собственной энергии и собственных функций будем производить следуя Бете [2]. Волновая функция L частиц имеет вид

$$\Psi_L = \sum_{n_1, n_2 \ldots = 1}^{N} \Phi_L(n_1 n_2 \ldots n_L)\, a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ \ldots a_{n_L}^+ |0\rangle, \qquad (2)$$

$$\Phi_L(n_1 n_2 \ldots n_L) = \sum_{P=1}^{L!} \exp i \left(\sum_{j=1}^{L} k_{p_j} n_j + \sum_{j<l} \phi_{p_j p_l} \right),$$

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_L. \qquad (3)$$

Здесь суммирование происходит по всем перестановкам "волновых векторов" k_i $(i = 1, \ldots, L)$, p_j указывает, какое число встало на j-ое место в результате перестановки P. Фазы ϕ_{ij} удовлетворяют следующим уравнениям:

$$N k_j = 2\pi\lambda_j + 2\sum_{l(\neq j)} \phi_{jl}, \qquad (4а)$$

$$\gamma \cos\left(\phi_{ij} + \frac{k_j - k_i}{2}\right) = \cos\phi_{ij} \cos\frac{k_i + k_j}{2}. \qquad (4б)$$

Здесь λ_j – целые числа, заключенные в пределах от 0 до $N - 1$, ϕ_{ij} можно определить так, чтобы $-\pi/2 < \mathrm{Re}\,\phi_{ij} < \pi/2$. Наконец, собственная энергия выражается в виде:

$$E = \sum_{i=1}^{L} \cos k_i. \qquad (5)$$

Уравнения (4), решались для системы спинов конечной плотности во многих работах [3–5]. При этом предполагалось, что основному состоянию соответствуют действительные k_i. Это предположение, однако, не было строго обосновано, в связи с чем авторы названных работ указывают на возможное значение комплексных k_i. Мы начнем исследование комплексных k_i с системы конечного числа связанных спинов.

Для решения уравнений (4) для конечной системы спинов примем, что большими являются только фазы $\phi_{12}, \phi_{25}, \phi_{34}, \ldots, \phi_{L-1,L}$. Это предположение впоследствие получит строгое обоснование. Далее без ограничения общности будем считать, что $\mathrm{Im}\,\phi_{r-1,r} > 0$. Из циклических условий (4а) следует:

$$
\begin{aligned}
&2\,\mathrm{Im}\,\phi_{12} = N\,\mathrm{Im}\,k_1 = N\kappa_1, \\
&2\,\mathrm{Im}(\phi_{23} - \phi_{12}) = N\,\mathrm{Im}_{k_2} = N\kappa_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (6) \\
&-2\,\mathrm{Im}\phi_{L-1,L} = N\mathrm{Im}\,k_L = N\kappa_L, \\
&\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_L = 0.
\end{aligned}
$$

Подставляя большие фазы в уравнение (4б) с экспоненциальной по N точностью будем иметь

$$\gamma e \frac{i\,k_i - k_i + 1}{2} = \cos \frac{k_j + k_i + 1}{2} \qquad i = 1, 2, \ldots, L-1. \qquad (7)$$

К этим $L-1$ – уравнениям следует прибавить уравнение

$$\sum_{i=1}^{L} k_i = u = \frac{2\pi}{N} \sum_{i=1}^{N} \lambda_i, \qquad (8)$$

которое следует из (4а). u – суммарный "импульс" системы спинов, собственная энергия зависит от него как от параметра. Волновая функция $\Psi_L(n_1 n_2 \ldots n_L)$ при сдвиге $n_i \to n_i + k$ умножается на фактор $\exp(i\,u\,k)$. Таким образом, волновую функцию нужно характеризовать "импульсом" u.

Решение уравнений (7) нужно записывать в трех областях изменения параметра γ: $\gamma > 1$, $\gamma < -1$ и $|\gamma| < 1$. Мы приведем решение только в первом случае

$$\gamma = \mathrm{ch}\,v > 1,$$

$$e^{ik_n} = \frac{\mathrm{sh}(L-n)v + e^{iu}\,\mathrm{sh}\,nv}{\mathrm{sh}(L-n+1)v + e^{iu}\,\mathrm{sh}(n-1)v}, \qquad (9)$$

$$E_L^1(u) = L\,\mathrm{ch}\,v + \frac{\mathrm{sh}\,v}{\mathrm{sh}\,Lv}\cos u - \mathrm{sh}\,v\,\mathrm{cth}\,L v.$$

В случае $|\gamma| < 1$ на γ и u существуют ограничения, которые мы за недостатком места не выписываем.

Подставляя найденные k_i в (4а), нетрудно видеть, что остальные ϕ_{ij} малы по сравнению с $\phi_{k-1,k}$; это и оправдывает сделанное предположение.

Приведем без доказательства несколько следствий (9):

1. При $\gamma < -1$, связанные состояния L-частиц имеют энергию ниже, чем энергия $L-1$ связанных частиц плюс одна свободная частица (разумеется, при одинаковых u).

2. При $\gamma > 1$, связанные состояния L-частиц имеют энергию выше, чем энергия $L-1$ связанных частиц плюс одна свободная частица.

3. При $|\gamma| < 1$, связанные состояния L-частиц попадают в непрерывный спектр (за исключением $L=2$).

4. Для волновой функции связанного состояния (3) в сумме по перестановкам остается только одно слагаемое $\exp i(k_1 n_1 + \ldots + k_L n_L)$.

5. Для $|\gamma| > 1$ комплекс является жестким, т.е. вероятность появляния в середине комплекса дырки ничтожна. Дырки с заметной вероятностью могут появляться на концах комплекса.

6. Для $|\gamma| \lessgtr 1$ комплекс становится рыхлым, т.е. состояния с дыркой внутри комплекса возможны.

7. При $L \to \infty$, $E \approx L\gamma$ для всех γ и плотность частиц в комплексе стремится к единице.

Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л.Я.Карпова

Поступило в редакцию 8 октября 1966 г.

Литература

[1] S.Rodriguez. Phys.Rev., 116, 1474, 1959.
[2] H.Bethe. Z.Physik. 71, 205, 1931.
[3] R.Orbach. Phys. Rev., 112, 309, 1958.
[4] R.Griffiths. Phys.Rev., 133 A, 768, 1964.
[5] I.des Cloizeaux, I.Pearson. Phys. Rev., 128, 2131, 1962.

---

* При этом $N \to \infty$.