Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 9, стр. 402 – 405 *10 мая 1985 г.*

ГРАВИТАЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВО ВСЕЛЕННОЙ, ЗАПОЛНЕННОЙ СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

В.Ф.Муханов

Рассмотрена самосогласованная задача о поведении малых возмущений в однородной изотропной Вселенной, заполненной скалярным полем. Получены решения, описывающие эволюцию возмущений в случае произвольного потенциала скалярного поля.

В связи с инфляционными сценариями эволюции Вселенной [1 – 3] появилась возможность получить спектр затравочных возмущений для образования галактик из первоначально квантовых флуктуаций [4 – 11]. В моделях со скалярным полем с потенциалом типа Колемана – Вайнберга возмущения на де Ситтеровской стадии рассматривались в работах [7 – 11]. Однако, в этих работах возмущения метрики после распада де Ситтеровской стадии оценивались качественными методами.

В данной работе решается самосогласованная (с учетом флуктуации метрики) задача о поведении возмущений на всех этапах эволюции однородной, изотропной Вселенной, заполненной скалярным полем с произвольным потенциалом $V(\varphi)$.

Пусть полное действие для скалярного и гравитационного полей имеет вид

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int R\sqrt{-g}\, d^4x + \int \left[\frac{1}{2} \varphi_{;\, i}\, \varphi^{;\, i} - V(\varphi)\right] \sqrt{-g}\, d^4x . \tag{1}$$

Здесь скорость света $c = 1$. Метрику плоской однородной, изотропной Вселенной с малыми возмущениями скалярного типа можно записать следующим образом [13]:

$$ds^2 = (1 + 2\varnothing)\, dt^2 - (1 - 2\varnothing)\, a^2(t)\, \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta , \tag{2}$$

поскольку для скалярного поля $\delta T^\alpha_\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$ в первом порядке по возмущениям поля $\delta\varphi$,

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi_0(t) + \delta\varphi(\mathbf{x}, t) . \tag{3}$$

В нулевом порядке теорий возмущений уравнения Эйнштейна сводятся к следующим соотношениям для масштабного фактора $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot\varphi_0^2 + V(\varphi_0)\right), \tag{4}$$

$$2\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = 8\pi G\left(-\frac{1}{2}\dot\varphi_0^2 + V(\varphi_0)\right), \tag{5}$$

где точка означает дифференцирование по времени t. Из (4) и (5) следует, что

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^{\cdot} = -4\pi G \dot\varphi_0^2 \tag{6}$$

и уравнение для однородной моды поля

$$\ddot\varphi_0 + 3\frac{\dot a}{a}\dot\varphi_0 + V_{,\varphi}(\varphi_0) = 0, \qquad V_{,\varphi} = \frac{\partial V}{\partial\varphi} . \tag{7}$$

Далее, линеаризуя уравнения Эйнштейна по $\varnothing$ и $\delta\varphi$, получаем систему уравнений для возмущений:

$$\frac{1}{a^2}\Delta\varnothing - 3\frac{\dot a}{a}\dot\varnothing - 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\varnothing = 4\pi G\,[\dot\varphi_0\delta\dot\varphi - \dot\varphi_0^2\varnothing + V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi], \tag{8}$$

$$\frac{1}{a}(a\varPhi)^{\bullet}_{,\beta} = 4\pi G(\dot{\varphi}_0\delta\varphi)_{,\beta}\,, \tag{9}$$

$$\ddot{\varPhi} + 4\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varPhi} + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right)\varPhi = 4\pi G\,[\dot{\varphi}_0\delta\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_0^2\varPhi - V_{,\varphi}(\varphi_0)\delta\varphi]. \tag{10}$$

Вычитая из (10) уравнение (8) и используя (7) и (9), находим, что потенциал $\varPhi$ удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\varPhi} + \left(\frac{\dot{a}}{a} - 2\frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0}\right)\dot{\varPhi} - \frac{1}{a^2}\Delta\varPhi + 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{\dot{a}}{a}\frac{\ddot{\varphi}_0}{\dot{\varphi}_0}\right)\varPhi = 0. \tag{11}$$

Вводя вместо t конформное время $\eta = \int dt/_a$ и используя (6), для $u = {}^a/_{\varphi'}\varPhi$ получаем:

$$u'' - \Delta u - \frac{(a'/a^2\varphi'_0)''}{(a'/a^2\varphi'_0)}u = 0, \tag{12}$$

где штрих обозначает дифференцирование по η. Решения уравнения (12) легко находятся в асимптотиках. Рассмотрим плоскую волну с волновым вектором $\dot{k}$, т.е. $\varPhi, \delta\varphi, u \propto e^{i\mathbf{kx}}$. Решая в этом случае уравнение (12) и выражая результат через t, после несложных вычислений получаем окончательно:

$$\varPhi = A\left(1 - \frac{\dot{a}}{a^2}\int^t a\,dt\right), \tag{13}$$

$$\delta\varphi = A\,\dot{\varphi}_0\frac{1}{a}\int adt, \tag{14}$$

для длинноволновых возмущений, для которых $k^2 \ll \dfrac{(a'/a^2\varphi'_0)''}{(a'/a^2\varphi'_0)}$. Падающей моде отвечает константа интегрирования в (13) и (14). Для возмущений с масштабами много меньшими горизонта для которых $k^2 \gg \dfrac{(a'/a^2\varphi'_0)''}{a'/a^2\varphi'_0}$, находим:

$$\varPhi = \dot{\varphi}_0\left(C_1\sin\left(k\int\frac{dt}{a}\right) + C_2\cos\left(k\int\frac{dt}{a}\right)\right)e^{i\mathbf{kx}}\,, \tag{15}$$

$$\delta\varphi \simeq \frac{1}{4\pi G}\frac{k}{a}\left(C_1\cos\left(k\int\frac{dt}{a}\right) - C_2\sin\left(k\int\frac{dt}{a}\right)\right)e^{i\mathbf{kx}}. \tag{16}$$

В дальнейшем мы акцентируем внимание на исследовании длинноволновых возмущений. Из (13) и (14) для них получаем связь между $\varPhi$ и $\delta\varphi$:

$$\varPhi = \left[\frac{a}{\int^t adt}\frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}\right]\left(1 - \frac{\dot{a}}{a^2}\int adt\right). \tag{17}$$

Для длинноволновых возмущений величина $A = \dfrac{a}{\int^t adt}\dfrac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}$ постоянна на любой стадии эволюции Вселенной, на которой применимо рассматриваемое приближение для возмущений.

Рассмотрим теперь конкретный пример. Пусть потенциал $V(\varphi)$ таков, что вблизи точки φ_m он имеет минимум. В окрестности минимума однородное скалярное поле быстро осциллирует и Вселенная расширяется (с точностью до малых осцилляций масштабного фактора) подобно Вселенной, заполненной пылью, т. е. $a(t) \propto t^{2/3}$ [15, 16]. Тогда используя (14) находим

$$\Phi \simeq \frac{3}{5}A + \frac{B}{t^{5/3}}, \qquad (19)$$

т. е. поведение длинноволновых возмущений метрики в этом случае аналогично поведению возмущений во Вселенной, заполненной пылью [14, 13]. Если в дальнейшем скалярное поле распадается на ультрарелятивистские частицы, возмущения метрики остаются неизменными. Как уже отмечалось, константа A выражается через возмущения скалярного поля $\delta\varphi$:

$$A = \frac{a}{\int^t a\,dt}\,\frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}. \qquad (20)$$

Допустим, что "пылевидной" стадии предшествовала "квази – де Ситтеровская" стадия, на которой $a \propto e^{Ht}$, где Хаббловская постоянная H остается практически неизменной на протяжении этой стадии (этот случай реализуется, например, для потенциала Колемана – Вайнберга [2]). Тогда амплитуда незатухающей моды возмущений метрики Φ и "плотности" $\delta T^0_0/T^0_0$ на "пылевидной" и последующей ультрарелятивистской стадиях выражаются следующим образом через возмущения скалярного поля на "квази – де Ситтеровской" стадии:

$$\Phi = \frac{3}{5}H\left(\frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}\right)_{\text{д.С.}} \qquad \frac{\delta T^0_0}{T^0_0} = -2\Phi = -\frac{5}{6}H\left(\frac{\delta\varphi}{\dot{\varphi}_0}\right)_{\text{д.С.}}, \qquad (21)$$

где величина $(\delta\varphi/\dot{\varphi}_0)_{\text{д.С.}}$ оценивается в произвольный момент времени на де Ситтеровской стадии, когда размеры рассматриваемого возмущения превышают размеры горизонта. Этот результат с точностью до численного коэффициента совпадает с оценками, полученными в [7–11]. Амплитуду $\delta\varphi$ на де Ситтеровской стадии рассматриваемого типа, отвечающую начальным квантовым флуктуациям, можно найти, квантуя скалярное поле без учета обратного влияния возмущений метрики, поскольку возмущения метрики на ней ничтожно малы, как это можно увидеть, анализируя (13) и (15). В сценариях хаотической инфляции [12], для оценки возмущений в общем случае, следует использовать формулу (20), поскольку на протяжении инфляционной стадии Хаббловская постоянная существенно изменяется за период инфляции.

Автор благодарен Я.Б.Зельдовичу, А.Д.Линде, М.А.Маркову за обсуждения.

Литература

1. *Guth A.* Phys. Rev., 1981, **D23**, 347.
2. *Linde A.D.* Phys. Lett., 1982, **108B**, 389.
3. *Starobinsky A.A.* Phys. Lett., 1980, **91B**, 99.
4. *Chibisov G.V., Mukhanov V.F.* "Galaxy formation and phonons". Preprint N 162 of P.N.Lebedev Phys. Inst.
5. *Муханов В.Ф., Чибисов Г.В.* Письма в ЖЭТФ, 1981, **33**, 549.
6. *Муханов В.Ф., Чибисов Г.В.* ЖЭТФ, 1982, **83**, 475.
7. *Guth A., Pi S.-Y.* Phys. Rev. Lett., 1982, **49**, 1110.
8. *Hawking S.W.* Phys. Lett., 1982, **115B**, 295.
9. *Bardeen J.P., Steinhardt P., Turner M.* Phys. Rev., 1983, **D26**, 679.
10. *Starobinsky A.A.* Phys. Lett., 1982, **117B**, 175.
11. *Brandenberger R., Kahn R.* "Cosmological perturbations in inflanationary Universe" 1983, Harvard Univ. preprint.
12. *Linde A.D.* Phys. Lett., 1983, **129B**, 177.
13. *Chibisov G.V., Mukhanov V.F.* "Theory of Relativistic Potential: Cosmological Perturbations", 1983, Preprint N 154 of P.N.Lebedev Phys. Inst.

14. *Лифшиц Е.М.* ЖЭТФ, 1946, **16**, 587.

15. *Zel'dovich Ya.B.* Soviet. Sci. Rev., Ser. E, Astrophys. ed. R.A. Sunyaev, v. 6, 1985.

16. *Khlopov M.Yu., Malamed B.A., Zel'dovich Ya.B.* M.N.R.A.S., 1985, **214**, 100.

Институт ядерных исследований
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 февраля 1985 г.