Письма в ЖЭТФ, том 41, вып. 9, стр. 405 – 407 10 мая 1985 г.

ВЛИЯНИЕ КВАНТОВЫХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ФОРМУ ИНСТАНТОНА

А.Б.Мигдал, Н.О.Агасян, С.Б.Хохлачев

Показано, что квантовые эффекты сильно влияют на форму инстантона. В частности, у инстантона с малым по сравнению с радиусом конфайнмента размером на больших расстояниях от его центра степенная асимптотика классического решения заменяется спадом профильной функции по закону Гаусса.

Обычно, для вычисления инстантонных вкладов в различные вакуумные средние, используют разложение по малым отклонениям от среднего поля, удовлетворяющего классическим уравнениям Янга – Миллса [1 – 3]. Ясно, что это разложение "не работает" для инстантонов с размерами порядка радиуса конфайнмента R_c, когда становятся существенными непертурбативные эффекты, которые изменяют как их форму, так и распределение по масштабам. Удивительно, однако, то, что уже для инстантона малого размера квантовые эффекты приводят к существенному изменению профильной функции на больших расстояниях от его центра ($R_c^2 \gg x^2 \gtrsim \rho^2/\alpha_s$), ρ – масштаб инстантона, α_s – глюодинамическая константа связи).

Самый простой способ учесть влияние квантовых флуктуаций на форму инстантона – применить метод эффективного действия. Эффективное действие позволяет получать уравнения для среднего поля. В случае инстантона, однако, имеются некоторые специфические особенности. Дело в том, что наличие нулевых мод в поле инстантона приводит к необходимости использовать "поперечные" функции Грина в петлевом разложении для эффективного действия, причем соответствующие коллективные координаты (x_0 – "центр тяжести" инстантона, ρ – масштаб, $S(x)$ – калибровочная фаза) остаются квантовыми степенями свободы инстантонного поля. Поэтому, в отличие от обычного способа использования эффективного действия, в данном случае сначала следует найти вклад инстантона с заданными x_0, ρ и $S(x)$, а окончательные ответы получаются затем усреднением по этим коллективным координатам. Обычно эти координаты вводят используя решение классических уравнений:

$$A^a_\mu(x) = 2\bar{\eta}^a_{\mu\nu}\frac{x_\nu}{x^2} f_0\left(\frac{x^2}{\rho^2}\right), \quad f_0(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}, \quad \xi_\mu = \frac{x_\mu}{\rho}. \tag{1}$$

Вместе с тем учет квантовых эффектов приводит к изменению профильной функции $f(\xi^2)$ среднего глюонного поля. Поэтому разумно выделить коллективные координаты используя именно это будущее среднее поле, и не его классическую часть. Нетрудно убедиться, что для получения уравнений движения из эффективного действия необходимо наложить ограничения на возможные вариации среднего поля, а именно, вариации $\delta A_\mu(\xi)$ не должны изменять x_0, ρ и $S(x)$, т. е. должны удовлетворять условиям ортогональности

$$\int d^4\xi \,\mathrm{tr}\,[\delta A_\mu \hat{D}_i \bar{A}_\mu] = 0, \quad A_\mu = A^a_\mu \frac{\tau^a}{2}, \tag{2}$$

$\hat{D}_i \bar{A}_\mu(\xi)$ – изменения среднего поля $\bar{A}_\mu$, обусловленные изменением коллективных координат. Эти ограничения приводят к модификации уравнений движения, вытекающих из требования минимальности эффективного действия $S_{eff}(A_\mu)$:

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(\xi)}\bigg|_{A_\mu = \bar{A}_\mu} = \sum_i \lambda_i \hat{D}_i \bar{A}_\mu(\xi) \tag{3}$$

λ_i – соответствующие множители Лагранжа. Чтобы их определить, умножим уравнение (3) на $\hat{D}_j \bar{A}_\mu(\xi)$ и проинтегрируем по ξ. В силу ортогональности различных $\hat{D}_i \bar{A}_\mu(\xi)$ получаем:

$$\lambda_i = \frac{1}{N_i^2} \int d^4\xi \,\mathrm{tr}\left\{\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(\xi)}\bigg|_{A_\mu = \bar{A}_\mu} \hat{D}_i \bar{A}_\mu(\xi)\right\}, \tag{4}$$

$$N_i^2 = \int d^4\xi \;\mathrm{tr}\,\{\hat{D}_i \bar{A}_\mu(\xi)\}^2. \tag{5}$$

Из (4) видно, что λ_i связаны с изменением S_{eff} при соответствующем преобразовании симметрии. Следовательно, если симметрия не разрушена квантовыми аномалиями, то соответствующие $\lambda_i = 0$. В нашем случае единственной нарушенной симметрией является масштабная симметрия, а единственный ненулевой множитель Лагранжа λ_ρ определяется равенством:

$$\lambda_\rho = \frac{1}{N_\rho^2} \int d^4\xi \,\mathrm{tr}\left\{\frac{\delta S_{eff}}{\delta A_\mu(\xi)}\bigg|_{A_\mu = \bar{A}_\mu} \hat{D}_\rho \bar{A}_\mu(\xi)\right\} = \frac{1}{N_\rho^2} \int d^4\xi \,\theta_{\mu\mu}(\xi), \tag{6}$$

где $\hat{D}_\rho \bar{A}_\mu = (1 + \xi_\nu \partial_\nu)\bar{A}_\mu(\xi)$, а $\theta_{\mu\mu}(\xi)$ – след тензора энергии-импульса. Используя известную формулу для конформной аномалии [4], получаем:

$$\lambda_\rho = \frac{1}{N_\rho^2} \int d^4\xi \,\frac{\beta(\alpha_s)}{\alpha_s^2}\,\mathrm{tr}\,F^2_{\mu\nu}, \tag{7}$$

где α_s – зависит от масштаба l и от величины поля $F^2 = 2\mathrm{tr}\,F^2_{\mu\nu}$.

Для того, чтобы придать смысл уравнению (3) необходимо вычислить или задаться модельным видом S_{eff}:

$$S_{eff} = \frac{b}{8\pi} \int d^4\xi \,\frac{1}{\alpha_s}\,\mathrm{tr}\,F^2_{\mu\nu}.$$

Для инстантона малого размера поле вблизи его центра сильное и кроме того с хорошей точностью можно считать однородным, так как критерий однородности [5] $F'_\xi F^{-3/2} \ll 1$ выполняется благодаря большому численному множителю $F^2(0) = 192$. В этом случае в главном логарифмическом приближении можно пользоваться известным выражением [6]

$$\frac{1}{\alpha_s} = \frac{b}{4\pi} \ln\frac{F}{\Lambda^2}, \quad b = \frac{11}{3} N_c, \quad \Lambda \sim 100 \text{ МэВ}.$$

Вдали от центра $(R_c^2/\rho^2 \gg \xi^2 \gg 1)$ поле становится слабым и применимо обычное выражение

$$\frac{1}{\alpha_s} = \frac{b}{4\pi} \ln\frac{1}{\xi^2 \rho^2 \Lambda^2}.$$

С хорошей точностью можно использовать интерполяционную формулу, объединяющую обе асимптоматики

$$\frac{1}{\alpha_s} = \frac{b}{4\pi} \ln \frac{F + \frac{1}{\xi^2}}{\rho^2 \Lambda^2} . \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3) и воспользовавшись однопетлевым выражением для $\lambda_\rho = -\frac{b}{16\pi^2}$ на инстантонном анзаце

$$\bar{A}^a_\mu = 2\bar{\eta}^a_{\mu\nu} \frac{\xi_\nu}{\xi^2} f(\xi^2)$$

получаем уравнение для профильной функции f:

$$\ddot{f} - (2f^3 - 3f^2 + f) - \frac{\dot{\alpha}_s}{\alpha_s} \dot{f} = - \frac{b\alpha_s}{8\pi} e^t \dot{f}, \tag{9}$$

$$t = \ln \xi^2, \quad \frac{1}{\alpha_s} = \frac{b}{4\pi} \left\{ \ln \frac{1}{\rho^2 \Lambda^2} \{ [96 (\dot{f}^2 + f^2 (1-f)^2]^{1/2} \} - t \right\} .$$

Граничные условия $f(0) = 1$; $f(\infty) = 0$ диктуются требованием равенства единице топологического заряда

$$Q [\bar{A}_\mu] = \frac{1}{16\pi^2} \int d^4 \xi \,\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} \widetilde{F}_{\mu\nu} = 1.$$

Из уравнения (9) видно, что при $\xi^2 \gg 1$ справедлива асимптотика

$$f((\xi^2) \sim \frac{1}{\xi^2} \exp\left\{ - \frac{b}{8\pi} \alpha_s (\xi \rho \Lambda) \xi^2 \right\};$$

с другой стороны при $\xi^2 \ll 1$ применимо классическое решение (1) и интерполяционная формула

$$f(\xi^2) = \frac{1}{1 + \xi^2} \exp\left\{ - \frac{b}{8\pi} \alpha_s (\xi \rho \Lambda) \xi^2 \right\}$$

приближенно описывает характер поведения профильной функции при $\xi^2 \leqslant R_c^2/\rho^2$. Таким образом видно, что учет квантовых эффектов приводит к заметному уменьшению $f(\xi^2)$ на расстояниях $R_c^2/\rho^2 \gtrsim \xi^2 \gtrsim 1/\alpha_s$.

Рассмотренные эффекты особенно существенны для инстантонов с масштабами $\rho \sim R_c$. Можно думать, что их учет позволит решить проблему вычисления инстантонных вкладов в различные физические величины.

Мы признательны А.А.Мигдалу и А.М.Полякову за полезные обсуждения.

Литература

1. *Belavin A.A., Polyakov A.M., Schwartz A.S., Tyupkin Yu.S.* Phys. Lett., 1975, **59B**, 85.
2. *'t Hooft G.* Phys. Rev., 1976, **D14**, 3432.
3. *Polyakov A.M.* Nucl. Phys., 1977, **B120**, 429.
4. *Crewther R.* Phys. Rev. Lett., 1972, **28**, 1421; *Chanovitz M., Ellis J.* Phys. Lett., 1972, **40B**, 397; *Collins J., Dunkan L., Joglekar J.* Phys. Rev. 1977, **D16**, 438.
5. *Migdal A.B.* Instability of quantum Yang Mills field, and vacuum fluctuations. Proc. Intern. Symp. on Statistical mechanics, quarks and hadrous (Bielefeld, Fed. Rep. Germany, 1980).
6. *Matinyan S.G., Savvidy G.K.* Nucl. Phys., 1978, **B134**, 539.

Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
11 марта 1985 г.