ЗВУК В ВЫРОЖДЕННОМ РАСТВОРЕ He^3 В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ

И.М.Халатников

Как известно, при температурах ниже 0,8°К растворы He^3 в He^4 расслаиваются. При $T \to 0$ кривая расслоения одним концом упирается в точку чистого вещества (He^3), а другим – в точку, соответствующую раствору с концентрацией около 6% [1]. Свойства последнего представляют значительный интерес, так как при $T \ll T_{\text{выр}} = m^* v_F^2/2$ мы будем иметь вырожденный раствор в сверхтекучей жидкости. В таких растворах, благодаря пренебрежимой роли фононов и ротонов все термодинамические свойства будут определяться примесными возбуждениями ферми-жидкостного типа. Это подтверждается измерениями теплоемкости [2], которая изменяется с температурой по линейному закону.

Мы рассмотрим здесь свойства звука в вырожденном растворе вблизи абсолютного нуля, когда столкновения примесных возбуждений не существенны. В этом случае функция распределения возбуждений n удовлетворяет кинетическому уравнению с равным нулю интегралом столкновений [3].

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = 0, \tag{1}$$

где H – функция Гамильтона для возбуждения с импульсом $\mathbf{p}$, движущегося в сверхтекучей жидкости, имеющей скорость $\mathbf{v}_s$ [4]

$$H = \epsilon + \mathbf{p}\mathbf{v}_s \frac{\delta m}{m^*} - \frac{m v_s^2}{2} \frac{\delta m}{m^*}, \qquad \delta m = m^* - m \tag{2}$$

ϵ – энергия возбуждения в системе отсчета, где сверхтекучая жидкость покоится. Энергия ϵ зависит от импульса $\mathbf{p}$, плотности изотопа He^4 $\rho_l = N_0 n_4$ и является функционалом функции распределения n. Таким образом имеем

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{p^2}{2m^*} + \int f(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}') \delta n(p') d\tau' \tag{3}$$

δn – отклонение функции распределения от равновесного значения, $f(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}')$ – характерная для ферми-жидкости функция, описывающая взаимодействие возбуждений.

Движение сверхтекучей жидкости описывается двумя уравнениями [5]: уравнением непрерывности

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}_s + \int \mathbf{p} n \, d\tau) = 0 \tag{4}$$

и уравнением движения сверхтекучей жидкости

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left\{ \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + \mu_0(\rho_1) + \int n \frac{\partial H}{\partial \rho_1} d\tau \right\} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) может быть получено так же, как и в чистом сверхтекучем гелии, исходя из закона сохранения импульса [5]. При этом необходимо лишь дополнительно учитывать вклад в тензор потока импульса Π_{ik}, обязанный ферми-жидкостным эффектам

$$\delta \Pi_{ik} = \int n d\tau \int f(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}') \delta n(p') d\tau'. \quad (6)$$

Колебательное движение раствора описывается линеаризованной системой уравнений (1), (4), (5), в которых $\mathbf{v}_s$ и малые добавки ρ_1' и n_1 изменяются по закону $\exp(i\omega t - ikx)$. Из указанных уравнений имеем ($\nu = \cos\vartheta$)

$$(\omega - k\frac{\partial \epsilon}{\partial p}\nu) n_1 + \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} k \frac{\partial \epsilon}{\partial p}\nu \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_1}\rho_1' + p v_s \nu + \int f n_1 d\tau \right) = 0; \quad (1)$$

$$\omega v_s - k\left[\left(\frac{s^2}{\rho_1} + \int n \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho_1^2} d\tau \right) \rho_1' + \int n_1 \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_1} d\tau \right] = 0; \quad (4)$$

$$\omega(\rho_1' + m\int n_1 d\tau) - k(\rho_1 v_s + \int n_1 p\nu d\tau) = 0 \quad (5)$$

(s – скорость звука в чистом сверхтекучем гелии).

В дальнейшем для простоты предполагаем функцию $f = f_0$ независящей от направлений импульсов константой. Тогда условие совместности система уравнений (1), (4), (5) получается приравниванием нулю соответствующего определителя. Таким путем находим дисперсионное уравнение

$$(1 - F_0 \omega_1)\left[u_1^2 (1 + c\beta)\left(1 - c\frac{\delta m}{m^*}\right) - u^2 \right] + 3 w_1 c \frac{m_4}{m^*} \left[\left\{ \left(a + \frac{\delta m}{m_4}\right)^2 + c\beta\left(\frac{\delta m}{m_4}\right)^2 \right\} u^2 + a^2 \left\{ u_1^2 \left(1 - c\frac{\delta m}{m_4}\right) - u^2 \right\} \right] = 0, \quad (7)$$

в котором введены следующие обозначения для безразмерных величин:

$$u_1^2 = \frac{s^2}{v_F^2}, \quad u = \frac{\omega}{k v_F}, \quad F_0 = f\left(\frac{\partial \tau}{\partial \epsilon}\right)_{\epsilon=\epsilon_F}, \quad a = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_1} \frac{\rho_1}{m_4 s^2} \right)_{\epsilon=\epsilon_F},$$

$$\beta = \left(\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \rho_1^2} \frac{\rho_1^2}{m_4 s^2} \right)_{\epsilon=\epsilon_F}.$$

Здесь: $c = N_3/N_4$ – концентрация раствора, N_3 – число атомов He^3, m_4 – масса атома He^4, $v_F^2 = \hbar^2/m^{*2}(3\pi^2 N_3)^{2/3}$, $w_1(u) = -1 + (u/2)\ln[(u+1)/(u-1)]$.

Поскольку $u_1^2 \gg 1$ уравнение (7) имеет решение со значением u^2 близким к u_1^2. Решая это уравнение в предположении $u^2 \gg 1$

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = u_1^2 v_F^2 = s^2 \left\{1 + c\left[\frac{m_4}{m^*}\left(\alpha + \frac{\delta m}{m_4}\right)^2 + \beta - \frac{\delta m}{m_4}\right]\right\}. \qquad (8)$$

Формула (8) определяет скорость звука в вырожденном растворе в зависимости от концентрации раствора. По оценкам второй член в (8) составляет несколько процентов от величины s, т.е. представляет собой вполне наблюдаемый эффект.

Уравнение (7) описывает также коллективные колебания ферми-жидкости, образованной атомами растворенного изотопа He^3, и аналогичные нулевому звуку. При этом учет членов, объединенных во второй квадратной скобке в (7) является необходимым, поскольку, как мы увидим, величина F_0 имеет тот же порядок малости, что и $c u_1^2$. Искомый корень уравнения (7) очевидно должен лежать вблизи $u_1^2 = 1$, так как лишь тогда $w_1(u) \gg 1$ и уравнение (7) может быть удовлетворено. При $u \approx 1$ уравнение (7) превращается в

$$1 - \tilde{F}_0 w_1(u) = 0, \quad \tilde{F}_0 = F_0 - 3c\frac{m_4}{m^*}\left[\alpha^2 u_1^2 + \left(\alpha + \frac{\delta m}{m_4}\right)^2\right]. \qquad (9)$$

Так что мы имеем хорошо известное из теории ферми-жидкости уравнение для нулевого звука в приближении, когда $F = F_0$[6]. Однако мы видим, что в случае вырожденного раствора происходит перенормировка константы F_0. Указанная перенормировка обязана взаимодействию фермиевских возбуждений, возникающему благодаря тому, что возбуждения находятся в колеблющейся сверхтекучей жидкости.

Константа F_0, таким образом, описывает взаимодействие ферми-возбуждений в покоящемся растворе. Как показано в [4] для слабого раствора изотопов величина F_0 может быть получена из простых термодинамических соображений, она равна $3c(m_4/m^*)u_1^2(2\alpha - 1)$. (К сожалению, точность этого соотношения не совсем ясна)*. В таком случае эффективное значение $\tilde{F}_0$ имеет отрицательный знак и незатухающий нулевой звук в вырожденном растворе не может распространяться. Учет первой гармоники F_1, как показывает оценка, произведенная в [4] (благодаря малости F_1) этот результат качественно не меняет. При этом, однако остается открытым вопрос о возможности более сложных типов коллективных колебаний с $\int n_1 dr = 0$.

В заключение выражаю глубокую благодарность А.Андрееву за очень полезную дискуссию.

Институт теоретической физики
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
6 февраля 1967 г.

Литература

[1] D.O.Edwards, D.F.Brewer, P.Seligman, M.Skertic, Yaqub. Phys. Rev. Lett., **15**, 773, 1965.

[2] A.Anderson, W.R.Roach, R.E.Sarwinski, J.S.Wheatley. Phys. Rev. Lett., **16**, 263, 1966.

[3] А.Ф.Андреев, И.М.Халатников. ЖЭТФ, **44**, 2058, 1963.

[4] J.Bardeen, G.Baym, D.Pines. Preprint; G. Baym. Phys. Rev. Lett., **17**, 952, 1964.

[5] И.М.Халатников. Введение в теорию сверхтекучести. Изд-во "Наука", М., 1965.

[6] А.А.Абрикосов, И.М.Халатников. УФН, **16**, 177, 1958.

---

* Второй член в квадратной скобке в (9) необходимо учитывать, поскольку происходит сильная компенсация первого члена в той же скобке с F_0 (a = 1,28 согласно [4]).