О СПЕКТРЕ ЭНЕРГИИ КОНЕЧНОЙ ФЕРМИ-СИСТЕМЫ

В.Н.Лихачев, В.Н.Сушко

Настоящей заметкой обращается внимание на возможность появления непрерывного спектра энергии у системы взаимодействующих фермионов, находящихся в **конечном** объеме.

Рассмотрим систему одномерных фермионов и антифермионов, самовзаимодействующих в ящике длины L и описываемых в Шредингеровском представлении гамильтонианом следующего вида [1]

$$H_g = H_0 + 2gH_I = -i\int\limits_{-L/2}^{L/2} dx : \Psi_1^*(x)\frac{\partial\Psi_1(x)}{\partial x} - \Psi_2^*(x)\frac{\partial\Psi_2(x)}{\partial x}: + \tag{1}$$

$$+ 2g\int\limits_{-L/2}^{L/2} dx\int\limits_{-L/2}^{L/2} dy : \Psi_1^*(x)\Psi_1(x)V(x-y)\Psi_2^*(y)\Psi_2(y):$$

здесь $V(x) = V(-x) = V^*(x)$ формфактор взаимодействия*; поле $\Psi_\alpha(x)$ и его эрмитовски сопряженное $\Psi_\alpha^*(x)$ удовлетворяют условию периодичности $\Psi_\alpha(-L/2) = \Psi_\alpha(L/2)$; $\Psi_\alpha^*(-L/2) = \Psi_\alpha^*(L/2)$ и обычным образом выражаются через операторы $a^*(p), a(p)$; $b^*(p), b(p)$ рождения и уничтожения фермионов и антифермионов **

$$\Psi_\alpha(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{L}\sum_q e^{-iqx}\Psi_\alpha(q) \equiv \frac{\sqrt{2\pi}}{L}\sum_q e^{iqx}[u_\alpha(q)a(q) + v_\alpha(q)b^*(-q)]; \tag{2}$$

где $\alpha = 1,2$; $-L/2 \leqslant x \leqslant L/2$; операторы $a(p), b(p)$ нормированы так, что

$$\{a(p),\ a^*(q)\}_+ = \{b(p)b^*(q)\}_+ = \frac{L}{2\pi}\delta_{p,q} = \begin{cases} L/2\pi, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases} \tag{3}$$

и

$$u_1(q) = v_2(q) \equiv \theta(q \geqslant 0) = \begin{cases} 1, & q \geqslant 0 \\ 0, & q < 0 \end{cases};\quad u_2(q) = v_1(q) \equiv \theta(q < 0) = \begin{cases} 0, & q \geqslant 0 \\ 1, & q < 0 \end{cases};$$

Символ :...: в (1) означает обычное виковское упорядочение по $a^*(p)$, $b^*(p)$; $a(p)$, $b(p)$. Состояния рассматриваемой физической системы будем описывать векторами фоковского для операторов a^*, a, b^*, b пространства H.

Гамильтониан H из (1) при любом* g определяет в H самосопряженный-оператор. Однако характер спектра этого оператора существенно зависит от величины $|2gV(p)|$. При $|2gV(p)| < 1$ он положительно определен и дискретен; при $|2gV(p)| = 1$ спектр H хотя и ограничен снизу, но содержит непрерывные ветви; при $|2gV(p)| > 1$ спектр H

содержит непрерывные ветви, заполняющие всю вещественную прямую.

Для того чтобы убедиться в этом, введем (при $p \neq 0$) определенные на плотном в H множестве $\tilde{H}$ финитных векторов операторы

$$A(p) = \frac{2\pi}{L\sqrt{|p|}}[\theta(p>0)\sum_q :\Psi_1^*(q)\,\Psi_1(q+p): + \theta(p<0)\sum_q :\Psi_2^*(q)\,\Psi_2(q+p):]$$

$$A^+(p) = \frac{2\pi}{L\sqrt{|p|}}[\theta(p>0)\sum_q :\Psi_1^*(q)\,\Psi_1(q-p): + \theta(p<0)\sum_q :\Psi_2^*(q)\,\Psi_2(q-p):]. \tag{4}$$

Операторы $A(p)$ и $A^+(p)$ неограничены, но $\tilde{H}$ инвариантно относительно них, так что имеет четкий смысл коммутатор $[A(p),\ A^+(p)]$. Прямое вычисление дает [1]:

$$[A(p),\ A^+(p)]_- = \frac{L}{2\pi}\,\delta_{p,q}\,, \tag{5}$$

что означает, что (4) является представлением бозевских соотношений коммутации (БСК). Это представление приводимо. Можно доказать,что все пространство H разлагается в прямую сумму подпространств $H(\lambda_1, \lambda_2)$, в каждом из которых операторы $A(p)$, $A^+(p)$ порождают неприводимое представление БСК. Подпространства $H(\lambda_1, \lambda_2)$ характеризуются тем, что являются собственными подпространствами коммутирующих между собой операторов Λ_1, Λ_2

$$\Lambda_a = \frac{2\pi}{L}\sum_q [u_a(q)\,a^*(q)\,a(q) - v_a(-q)\,b^*(q)b(q)]$$

$$[\Lambda_1, \Lambda_2]_- = [\Lambda_a, A(p)]_- = [\Lambda_a, A^+(p)]_- = 0;\ \ \Lambda_a H(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_a H(\lambda_1, \lambda_2);$$

$$\lambda_a = 0;\ \pm1;\ \pm2;\ \dots\ .$$

Можно доказать, также, что в $H(\lambda_1, \lambda_2)$ существует единственный вектор $\phi_0(\lambda_1, \lambda_2)$, удовлетворяющий уравнению $A(p)\,\phi_0(\lambda_1, \lambda_2) = 0$ при всех $p \neq 0$. Это означает, что неприводимые представления, на которые разлагается представление (4), эквивалентны фоковскому представлению БСК. Используя (2) – (5), легко проверить, что $[H_0 - \sum_q |q| A^+(q) A(q),\ A(p)]_- = 0$. Отсюда, в силу неприводимости $A(p)$, $A^+(p)$ в каждом из $H(\lambda_1, \lambda_2)$, вытекает возможность представления H из (1) в виде:

$$H = \frac{2\pi}{L}\sum_{q>0} q\{A^+(q)\,A(q) + A^+(-q)\,A(-q) + 2g\,V(q)[A^+(q)\,A^+(-q) + A(q)\,A(-q)]\} + E(\lambda_1, \lambda_2),$$

где $E(\lambda_1, \lambda_2)$ однозначно определяется уравнением

$$H_0 \phi_0(\lambda_1, \lambda_2) = E(\lambda_1, \lambda_2)\, \phi_0(\lambda_1, \lambda_2).$$

Таким образом, задача вычисления энергии фермиевской системы сводится к хорошо изученной бозевской задаче, откуда уже очевидным образом следует описанный выше характер спектра H. Физически появление непрерывного спектра связано с тем, что рассматриваемая система, будучи ограниченной в пространстве, тем не менее обладает бесконечным числом степеней свободы, о чем свидетельствует возможность неограниченного рождения пар: импульсное пространство хотя и дискретно, но неограничено.

Рассмотренный пример показывает, что при описании конечных ферми-систем (таких, например, как ядро) возможны ограничения на силу взаимодействия, диктуемые требованием положительности энергии. С другой стороны, этот же пример указывает на возможную необходимость использования при описании подобных систем нефоковских представлений коммутационных соотношений.

Поступило в редакцию
23 февраля 1967 г.

Литература

[1] D.C.Mattis, E.H.Lieb. J. Math. Phys., 6, 304, 1965.

---

* Для упрощения изложения предполагается, что

$$\tilde{V}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} dx\, V(x) \exp[ipx]$$

является финитной функцией, равной нулю при $p \geqslant p_{max}$ и что $\tilde{V}(0) = 0$. Все дальнейшее может быть доказано и в общем случае.

** В силу периодических граничных условий импульсные переменные p, q и т.п. пробегают значения $\pm 2\pi n/L$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.