

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД С БЕСКОНЕЧНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ПАРАМЕТРОВ ПОРЯДКА В $U(\infty)$ РЕШЕТОЧНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

В.А.Казаков¹⁾, Т.А.Кожамкулов, А.А.Мигдал¹⁾

В $U(N)$ решеточной калибровочной теории при $N \rightarrow \infty$ выделено N калибровочно-инвариантных параметров, которые описывают фазовый переход из области сильной связи в область слабой связи. С использованием метода разложения сильной связи вычисляется эффективный потенциал теории в терминах этих параметров. Эффективность метода проверяется на примере одноплакетной модели и во втором порядке разложения для D -мерной калибровочной теории.

¹⁾ ИСК при Президиуме АН СССР.

Как известно, возможность применения разложения сильной связи (РСС) в $U(N)$, $N > 3$ решеточных калибровочных теориях затрудняется из-за наличия фазового перехода первого рода, делающего недоступной фазу слабой связи ¹.

В этой работе (см. также ²) мы опишем метод модификации РСС, позволяющий единым образом описывать обе фазы.

Поясним суть метода на примере одноплакетной модели ¹, статсумма которой есть:

$$Z = \int d(U) \exp [N\beta \operatorname{tr} (U^+ + U)], \quad (1)$$

где $d(U)$ — $U(N)$ -мера Хаара. Будем параметризовать условие унитарности $U^+ U = 1$ при помощи лагранжева множителя — антиэрмитовой матрицы α ²:

$$Z = \int d\alpha \int d^2 U \exp \{ N \operatorname{tr} [\alpha - \alpha U^+ U + \beta(U^+ + U)] \}. \quad (2)$$

Интегрируя по U и U^+ и используя "полярное" представление для α :

$$\alpha_{ij} = \sum_k \Omega_{ik}^+ \lambda_k \Omega_{kj}, \quad (3)$$

где Ω — $U(N)$ — унитарная матрица, получаем:

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\lambda_i \exp \left[N \sum_{i=1}^N (\lambda_i - \ln \lambda_i + \beta^2 \lambda_i^{-1}) + \sum_{i \neq j} \ln |\lambda_i - \lambda_j| \right]. \quad (4)$$

Мы можем понимать выражение под знаком экспоненты в (4) как эффективный потенциал от N переменных λ_i , который представляет собой разложение по β^2 до первого порядка (в данном случае — дающее точный ответ). Теперь при $N \rightarrow \infty$ мы можем рассмотреть задачу точно, вводя нормированную плотность собственных значений $\rho(\lambda)$, и стандартными методами ³ получая для него уравнение для стационарной точки λ_i^* в (4):

$$2f \frac{\rho(\lambda') d\lambda'}{\lambda - \lambda'} = -1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{\beta^2}{\lambda^2}. \quad (5)$$

Решая (5) методами работы ³, мы получаем, например, для плакетной энергии

$$E_{pl}(\beta) = \left\langle \frac{\operatorname{tr} (U^+ + U)}{2N} \right\rangle_U = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{*-1} \quad (6)$$

решение, имеющее две ветви — сильной и слабой связи:

$$E_{pl} = \begin{cases} \beta, & \beta \leq \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{4\beta}, & \beta \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7)$$

разделенные фазовым переходом Гросса — Виттена ¹. Итак, эффективный потенциал в терминах λ_i в (4) естественным образом описывает обе фазы модели.

Нашей основной идеей является вычисление эффективных потенциалов как функций λ_i методом разложения его по степеням β . В отличие от стандартного разложения сильной связи, выделение свободных параметров λ_i , играющих роль N параметров порядка и в D -мерной калибровочной теории позволяет описывать обе фазы.

Для проверки этой программы рассмотрим ту же одноплакетную модель в виде

$$Z = \int d(U) \int d(V) \exp [\beta N \operatorname{tr} (UV^+ + VU^+)]. \quad (8)$$

Для наших иллюстративных целей мы не используем очевидную возможность выбора калибровки $V = I$.

Вводя лагранжевы множители α_1 и α_2 для матриц U и V и выполняя гауссово интегрирование по U и V , мы приходим к соотношению

$$Z = \int d\alpha_1 \int d\alpha_2 e^{N \text{tr}(\alpha_1 + \alpha_2) - \text{tr}_1 \text{tr}_2 \ln(\alpha_1 \otimes \alpha_2 - \beta^2)}. \quad (9)$$

При переходе к "полярным" переменным по формуле (3) для α_1 и α_2 , разлагая логарифм в (9) по степеням β^2 , мы получаем

$$Z = \int \prod_{k=1}^2 \prod_{i=1}^N d\lambda_i^{(k)} \exp \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\left(\sum_i \lambda_i^{(k)} - \ln \lambda_i^{(k)} \right) + \sum_{i \neq j} \ln \left| \lambda_i^{(k)} - \lambda_j^{(k)} \right| \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^{2n}}{n} \prod_{k=1}^2 \left(\sum_i (\lambda_i^{(k)})^{-n} \right) \right\}. \quad (10)$$

При $N \rightarrow \infty$ мы опять находим уравнение, описывающее стационарную конфигурацию λ_i^* (из симметрии $\lambda_i^{(1)*} = \lambda_i^{(2)*}$)

$$2f \frac{d\lambda' \rho(\lambda')}{\lambda - \lambda'} = -1 + \sum_{n=0}^M \beta^{2n} \mu_n \lambda^{-n-1}, \quad (11)$$

где мы использовали обозначения

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_n = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^{-n} = \int d\lambda \rho(\lambda) \frac{1}{\lambda^n}. \quad (12)$$

В точном уравнении в (11) нужно положить $M = \infty$, однако мы исследуем уравнение (11) при конечном M , воспринимая правую часть (11) как вычисленную приближенно разложением в ряд по β^2 .

Мы обнаруживаем, что даже при конечном M уравнение (11) описывает две фазы: высокотемпературную, в которой

$$\mu_1 = 1, \quad (13)$$

$$\mu_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots \quad (14)$$

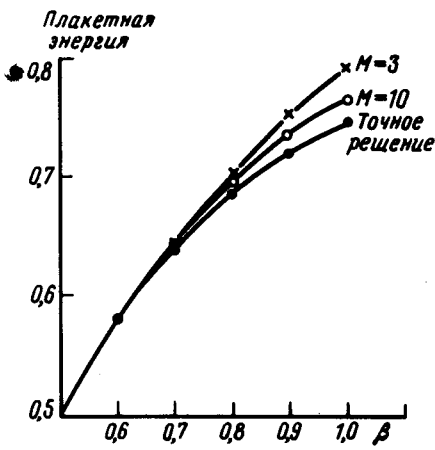
и низкотемпературную, которую мы исследовали численно, предварительно воспользовавшись методами работы ³ для получения самосогласованных уравнений на μ_n . Результаты расчетов для величины

$$E_{pl}(\beta) = \frac{1}{2N} \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \approx \sum_{n=1}^M \beta^{2n-1} \mu_n^2 \quad (15)$$

приведены для различных M на рисунке. (15) хорошо аппроксимирует точное решение (7) вплоть до некоторого β , где согласие резко ухудшается, причем, согласие тем лучше, чем больше M .

Аналогичная картина наблюдается в реальной D -мерной калибровочной теории, однако переход из одной фазы в другую имеет первый род, что согласуется с известными данными Монте-Карло ⁴. Плакетная энергия при фиксированных λ_i (которые одинаковы во всех точках решетки, исходя из пространственных симметрий стационарного решения) с точностью до порядка $O(\beta^4)$ имеет вид

$$E_{pl}(\lambda, \beta) = \beta \mu_1^4 + \beta^3 [4(2D-3) \mu_1^6 \mu_2 + 6 \mu_1^4 \mu_2^2]. \quad (16)$$



Результаты для одноплагетной модели с двумя матрицами в области слабой связи, полученные при помощи модифицированного разложения с 3 и с 10 членами (в области сильной связи воспроизводится точное решение)

Отметим, что λ_i – калибровочно-инвариантная переменная. Соответствующее уравнение стационарности имеет вид

$$2f \frac{\rho(\lambda) d\lambda}{\lambda - \lambda'} = -1 + \lambda^{-1} + A\lambda^{-2} + B\lambda^{-3}, \quad (17)$$

где

$$A = (D-1)[2\beta^2\mu_1^3 + 6(2D-3)\beta^4\mu_1^5\mu_2 + 6\beta^4\mu_1^3\mu_2^2], \quad (18)$$

$$B = 2(D-1)\beta^4[(2D-3)\mu_1^6 + 3\mu_1^4\mu_2]. \quad (19)$$

Исследование (17) – (19) теми же методами показывает, что высокотемпературное решение $\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$ при $n \geq 2$ существует при всех β . В то же время можно хотя бы для больших β убедиться в существовании низкотемпературной ветви. Для этого находим из (17) – (19) самосогласованное решение

$$E_{pl}(\beta) \underset{\beta \rightarrow \infty}{\approx} a\beta^{-3/7} \quad (20)$$

где

$$a = [6(D-1)^{-6}]^{1/7}. \quad (21)$$

Как обычно, переход первого рода между двумя решениями (17) – (19) происходит при β_c , соответствующем равенству термодинамических потенциалов обеих фаз. Подробное исследование уравнений (17) – (19) будет дано в расширенной работе.

Итак, мы описали метод аналитического вычисления физических величин в $U(\infty)$ калибровочной решеточной теории, основанный на модификации РСС путем введения N калибровочно-инвариантных параметров порядка λ_i , описывающих обе фазы теории. Дальнейшее количественное исследование теории в рамках нашего подхода требует применения ЭВМ.

Литература

1. Gross D. Witten E. Phys. Rev., 1980, D21, 446.
2. Казаков В.А. ЖЭТФ, 1983, 85, 1887; Migdal A.A. Phys. Rept., 1983, 102, №4.
3. Brezin E., Parisi G., Itzykson C., Zuber J.E. Comm. Math. Phys., 1978, 59, 35.
4. Drouffe J.M., Zuber J.E. Phys. Rept., 1983, 102, № 1, 2.