ФИЗИЧЕСКАЯ СИНГУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ НЕИДЕАЛЬНОЙ СРЕДОЙ

Л.П.Грищук

Рассмотрим пространство, заполненное неидеальной средой, т.е. средой, в которой происходят диссипативные процессы. Наличие таких процессов означает, что в каждый момент времени среда находится в неравновесном состоянии. Покажем, что в этом случае решение уравнений гравитации, зависящее от максимального числа физически произвольных функций трех переменных (для краткости – ф.п.ф.) обладает истинной сингулярностью в форме антиколлапса.

Тензор энергии-импульса материи напишем в следующем виде [1]:

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)\, u^{\mu} u^{\nu} + W^{\mu\nu}, \tag{1}$$

где

$$W^{\mu\nu} = \eta [u^{\mu};_{\sigma}(g^{\nu\sigma} - u^{\nu}u^{\sigma}) + u^{\nu};_{\sigma}(g^{\mu\sigma} - u^{\mu}u^{\sigma})] + (\zeta - \frac{2}{3}\eta)(g^{\mu\nu} - u^{\mu}u^{\nu})\, u^{\sigma};_{\sigma},$$

η и ζ – коэффициенты первой и второй вязкости, соответственно. Обычно о вязкости среды говорят в том случае, когда в сопутствующей системе координат члены $W^{\mu\nu}$ малы:

$$|W^{\mu\nu}| \ll |T^{\mu\nu} - W^{\mu\nu}|. \tag{2}$$

В рассматриваемом ниже решении условие (2) не выполняется, в связи с чем мы не пользуемся термином вязкость, а говорим лишь о неравновесных процессах.

Предположим, что вблизи гиперповерхности $r \equiv x^0 - x^3 = 0$ разложения компонент метрического тензора имеют следующий вид: *

$$-g_{ab} = a_{ab} + b_{ab} r + \ldots, \quad -g_{a3} = a_{a3} r^2 + b_{a3} r^3 + \ldots, \quad -g_{33} = a_{33} r^2 + b_{33} r^3 + \ldots \tag{3}$$

Пусть при $r = 0$ достигается физическая сингулярность, и разложения для плотности энергии, равновесного давления и компонент скорости таковы:

$$\epsilon = \epsilon^{(-1)} r^{-1} + \epsilon^{(0)} + \ldots, \quad p = p^{(-1)} r^{-1} + p^{(0)} + \ldots, \quad u^{\sigma} = u^{\sigma(0)} + u^{\sigma(1)} r + \ldots \tag{4}$$

(все коэффициенты в разложениях (3) и (4) – произвольные функции пространственных координат).

Спрашивается, совместимы ли предположения (1), (3), (4) с уравнениями Эйнштейна

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -T^{\mu\nu}, \tag{5}$$

а если совместимы, то от какого числа ф.п.ф. зависит соответствующее решение. Мы покажем, что упомянутые предположения совместимы с уравнениями (5) при одном дополнительном условии: сингулярность носит характер антиколлапса. Математически это проявляется в виде требования, чтобы на гиперповерхности $r = 0$ и в ее окрестности величина $u^{\sigma};_{\sigma}$, пропорциональная скорости относительного изменения собственного объема, была положительной

$$u^{\sigma};_{\sigma} \approx (u^{\sigma};_{\sigma})^{(-1)}\, r^{-1} > 0 \tag{6}$$

(на самой гиперповерхности $r = 0$ $u^{\sigma};_{\sigma}$ обращается в $+\infty$). Будет показано, что соответствующее решение зависит от максимального числа ф.п.ф.

Учет членов $W^{\mu\nu}$ в тензоре (1) увеличивает максимальное число ф.п.ф. по сравнению со случаем идеальной среды. Если коэффициент η отличен от нуля, то физический произвол определяется одиннадцатью функциями трех координат. Если $\eta = 0$, а $\zeta \neq 0$, то число ф.п.ф. равно девяти. Не останавливаясь на строгом математическом доказательстве, отметим, что этот результат понятен из физических соображений. Действительно, для идеальной среды начальные условия должны задавать распределение плотности материи, трех компонент скорости и еще четырех величин, характеризующих свободное гравитационное поле [3, 4]. Неидеальная среда описывается тензором энергии-импульса (1), куда входят также производные по времени от компонент скорости. Если $\eta \neq 0$, то тензор (1) содержит производные по времени от всех четырех компонент скорости. В силу $u_\mu u^\mu = 1$ независимыми являются только три производные, и именно для них должны быть заданы начальные данные, что увеличивает физический произвол на 3 функции. Если $\eta = 0$, а $\zeta \neq 0$, то в тензор (1) входит одна производная по времени от компоненты u^0. В этом случае число ф.п.ф. увеличивается на 1.

В первом приближении по r из уравнений (5) с индексами $\mu = a$, $\nu = b$; $\mu = 0$, $\nu = 3$; $\mu = a$, $\nu = 3$ получим, соответственно:

$$b_{ab} - a'_{ab} = 0, \quad u_0^{(1)} - u_0^{o'} = 0, \quad u^{a(1)} - u^{a(o)'} = 0 \tag{7}$$

(штрих обозначает дифференцирование по x^3). Принимая во внимание (7), найдем: $G^{33} \sim r^{-2}$, $T^{33} \sim r^{-3}$, остальные $G\mu\nu \sim r^{-1}$ и $T\mu\nu \sim r^{-1}$. Теперь из уравнения (5) с индексами $\mu = \nu = 3$ в приближении r^{-3} получим после некоторых преобразований:

$$G^{33(-3)} \equiv 0 = a^{33}\,[p^{(-1)} - (\zeta + \frac{4}{3}\eta)\,(u^\sigma;_\sigma)^{(-1)}] \equiv T^{33(-3)}. \tag{8}$$

Поскольку η и ζ существенно положительны, то из этого равенства следует, что величины $p^{(-1)}$ и $(u^\sigma;_\sigma)^{(-1)}$ имеют одинаковый знак. Так как $p \approx p^{(-1)} r^{-1} > 0$, то и $u^\sigma;_\sigma \approx (u^\sigma;_\sigma)^{(-1)} r^{-1} > 0$ (см. (6)). Остальные девять уравнений гравитации ($\mu \neq 3$, $\nu \neq 3$) в приближении r^{-1} связывают 20 входящих туда функций – коэффициентов рядов (3), (4) – так, что 11 функций остаются произвольными**. Поскольку решение не допускает преобразований координат, связанных с произвольной функцией трех переменных, то все 11 функций являются ф.п.ф.

Условие (2) для $\mu = \nu = 3$ имеет вид: $(\zeta + 4/3\,\eta)(u^\sigma;_\sigma)^{(-1)} \ll p^{(-1)}$. В это соотношение не входят составляющие вектора скорости, следовательно оно будет иметь точно такой же вид и в сопутствующей координатной системе. Сравнивая это неравенство с (8), видим, что условие (2) не выполняется.

Из уравнения (8) следует, что смешанная компонента T_3^3 ($T_3^3 = T^{3\nu} g_{3\nu} = -a_{33} T^{33(-3)} r^{-1} + \dots$) должна быть порядка r^0. Так как компонента T_3^3 в приближении r^{-1} не содержит составляющих вектора скорости, то она представляет собой давление (точнее, напряжение) вдоль оси x^3. Всилу уравнений гравитации это давление должно оставаться конечным при $r \to 0$. (Это требование автоматически выполняется для пылевидной среды, поскольку для нее $p \equiv 0$. В случае идеальной материи конечность давления вдоль оси x^3 влечет за собой конечность давления и в других направлениях, так как среда, находящаяся в равновесном состоянии, имеет изотропное давление. Поэтому физическая сингулярность в метрике (3) при $r = 0$ возможна в первом случае, причем с полным набором ф.п.ф., и не возможна во втором [5 – 7]. Для среды, находящейся в неравновесном состоянии, указанное требование совместимо с сингулярностью равновесного давления и плотности энергии в силу возможной в этом случае анизотропии давления. В рассматриваемом решении в начальный момент времени вещество сжато в "блин" в плоскости x^1, x^2 и начинает расширение вдоль оси x^3, ортогональной вблизи $r = 0$ к плоскости x^1, x^2. При неравновесном расширении давления в направлении оси x^3 становится меньше бесконечного равновесного давления на бесконечную же величину и оказывается величиной конечной. Таким образом физический смысл условия (6) понятен: при неравновесном сжатии вдоль некоторой оси необратимые процессы могли бы только увеличить давление в этом направлении.

Некоторые свойства рассмотренного решения подобны тем, которыми обладает решение для слабовзаимодействующих частиц на ранних стадиях расширения в анизотропно расширяющемся мире. [8]

Автор благодарен Я.Б. Зельдовичу и А.Л. Зельманову за помощь в интерпретации полученного результата, а также А.Г. Дорошкевичу и И.Д. Новикову за обсуждение.

Государственный астрономический институт им. П.К.Штернберга

Поступило в редакцию 22 июня 1967 г.

Литература

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика сплошных сред. М., 1954.

[2] Е.М. Лившиц, В.В. Судаков, И.М. Халатников. ЖЭТФ. 40, 1847, 1961.

[3] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля. М., изд-во "Наука", 1967.

[4] А.З. Петров. Новые методы в общей теории относительности. М., изд-во "Наука", 1966.
[5] Л.П. Грищук. Диссертация. ГАИШ, 1967 .
[6] Е.М. Лифшиц, И.М. Халатников. УФН. 80, 391, 1963
[7] Л.П. Грищук. ЖЭТФ. 51, 475, 1966
[8] А.Г. Дорошкевич, Я.Б. Зельдович, И.Д. Новиков. Письма ЖЭТФ, 5, 119, 1967.

---

* Разложения (3) впервые были предложены в работе [2]. Индексы a, b пробегают значения 1, 2.

** Подробнее см. [5].