О РАССЕЯНИИ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ НА ПРИМЕСИ СО СПИНОМ

С.Л. Гинзбург

Как хорошо известно, задачу о рассеянии электрона проводимости на примеси, имеющей спин, нельзя решать по теории возмущений. В ряде работ [1, 2] было получено решение с помощью дисперсионного подхода (можно показать, что вблизи поверхности Ферми результаты этих работ совпадают). Однако полученные там решения неаналитичны по константе связи.

В настоящей заметке приведено решение задачи для частного случая спина примеси равного единице, аналитическое по константе связи. Это решение при положительной константе связи совпадает с решением, полученным в [2], а при отрицательной константе соответствует отброшенному в [2] варианту решения с полюсом Кастильехо-Далитца-Дайсона. Способ получения приведенного ниже решения, а также обобщение на случай произвольного спина примеси будет опубликован в подробной работе.

В работе [2] были введены амплитуды $a_\pm$, являющиеся при $\omega > 0$ амплитудами рассеяния в состояниях с полным моментом $J = S \pm 1/2$; $a_\pm$ являются аналитическими функциями энергии. В [2] для них выведены условия унитарности. Мы вместо $a_\pm$ будем пользоваться элементами S-матрицы $S_\pm = 1 + 2ik\,a_\pm$, для которых имеют место следующие условия унитарности

$$\begin{aligned} &|S_\pm|^2 = 1; \qquad \omega > 0 \\ &|S_\pm|^2 = \frac{(\mathrm{Re}\,u)^2 + (3 \mp 2)^2 k^2}{(\mathrm{Re}\,u)^2 + 9k^2}; \qquad \omega < 0 \\ &\frac{S_+}{S_-} = \frac{u + 2ik}{u - 4ik} \end{aligned} \tag{1}$$

k – импульс электрона; функция u равна [2]:

$$u = \frac{1 + a_+ \; a_- \; k^2}{b} - \frac{4p_0}{\pi} - \frac{2k}{\pi} \ln\left|\frac{k - p_0}{k + p_0}\right| + ik\,\epsilon(\omega), \tag{2}$$

$a_\pm$ – борновские амплитуды рассеяния, введенные в [2], $b = \frac{a_+ - a_-}{2S + 1}$ – параметр, играющий роль константы связи в нашей задаче, p_0 – импульс Ферми, $\omega = E - E_F$; $\epsilon(\omega)$ – знаковая функция. Мы будем рассматривать лишь случай $p_0 \cdot a_\pm \ll 1$.

Легко проверить, что условиям унитарности (1) удовлетворяют следующие функции

$$S_{+} = \frac{u}{u-2ik} \; D(\omega) \; ,$$

$$S_{-} = \frac{u}{u-2ik} \; \frac{u-4ik}{u+2ik} \; D(\omega) \; , \qquad (3)$$

$$|D(\omega)|^2 = 1.$$

Выражение (3) по своей структуре аналогично решению уравнений Чу-Лоу, полученному рядом авторов [3,4].

Можно показать, что вблизи поверхности Ферми

$$D = \frac{1+ika}{1-ika}; \qquad a = \frac{(S+1)\, a_{+} + S\, a_{-}}{2S+1}. \qquad (4)$$

Из (3) и (4) мы видим, что решение аналитично по b.

Сравним полученный результат с решением, полученным в [2]. Рассмотрим сперва случай $b > 0$. Введем функцию

$$f(\omega) = -\frac{i}{2k} \ln \frac{u}{u-2ik}. \qquad (5)$$

Эта функция имеет так же, как и $u(\omega)$, разрез по ω от $-E_F$ до ∞, а также разрезы, связанные с нулями выражения, находящегося под знаком логарифма. Применим для $f(\omega)$ формулу Коши. Вклад от разреза от $-E_F$ до ∞ определяется условием унитарности (1). Когда $b > 0$, нули $u(u-2ik)^{-1}$ находятся на физическом листе только при $\omega \ll -E_F$, вклад от этих далеких разрезов легко учесть так же, как это сделано в (2). В результате получим для $S_{\pm}$

$$S_{\pm} = e^{2i\phi_{\pm}} \cdot \frac{1+ika_{\pm}}{1-ika_{\pm}}; \qquad b > 0,$$

$$\phi_{\pm} = -\frac{k}{4\pi} \int_{-E_F}^{0} \frac{d\omega'}{k'(\omega'-\omega)} \ln \frac{(\mathrm{Re}\, u)^2 + (3 \mp 2)^2 k'^2}{(\mathrm{Re}\, u)^2 + (3k')^2}. \qquad (6)$$

При $b < 0$ у функции u возникают на физическом листе дополнительные нули при $\omega = \pm i\epsilon_0$; $\epsilon_0 = E_F \exp(1/p_0 b)$, при этом у $f(\omega)$

появляется дополнительный разрез. Вклад от этого разреза легко учесть, в результате получим

$$S_{\pm} = e^{2i\phi_{\pm}} \frac{\omega - i\epsilon_0}{\omega + i\epsilon_0} \; \frac{1 + i k a_{\pm}}{1 - i k a_{\pm}} \quad ; \qquad b < 0 . \tag{7}$$

Выражение (7) для $S_{\pm}$ является аналитическим продолжением (6) по константе связи. В работе [2] рассматривалось выражение (6) как при $b > 0$, так и при $b < 0$, поэтому полученное там выражение неаналитично по константе связи. (7) можно представить в виде

$$S_{\pm} = e^{2i\phi_{\pm}} \frac{\dfrac{1}{a_{\pm}} + i k + \dfrac{\epsilon_0 k}{\omega - \dfrac{\epsilon_0}{ka_{\pm}}} \left[1 + \dfrac{1}{(ka_{\pm}1)^2}\right]}{\dfrac{1}{a_{\pm}} - i k + \dfrac{\epsilon_0 k}{\omega - \dfrac{\epsilon_0}{ka_{\pm}}} \left[1 + \dfrac{1}{(ka_{\pm})^2}\right]} . \tag{8}$$

Формула (8) совпадает с решением, полученным в [2], если в последнем ввести полюс Кастильехо-Далитца-Дайсона. Таким образом, требование аналитичности по константе связи приводит к появлению полюса в решении, полученном в [2]. Рассмотрим свойства полученного решения. Можно показать, что при $b > 0$ сечение рассеяния монотонно убывает при приближении к поверхности Ферми от своего обычного значения, равного $4\pi(a^2 + 2b^2)$ вдали от поверхности Ферми, до $4\pi a^2$ при $\omega = 0$.

При $b < 0$ на поверхности Ферми $(\omega = 0)$ сечение тоже равно $4\pi a^2$, но в этом случае оно уже не является монотонной функцией энергии и при $\omega \sim \epsilon_0$ равно по порядку величины $4\pi p_0^{-2} \gg 4\pi a^2$.

В заключение автор выражает благодарность С.В. Малееву за обсуждение работы.

Физико-технический институт
им. А.Ф.Иоффе
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
7 июня 1967 г.

Литература

[1] H. Suhl, D. Wong. Physics, 3, 17, 1967.
[2] С.В. Малеев. ЖЭТФ, 51, 1940, 1966.
[3] G. Wanders. Nuovo Cim., 23, 817, 1962.
[4] В.А. Мещеряков. ЖЭТФ, 51, 648, 1966.