# ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ КВАНТОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА–ВРЕМЕНИ СНАЙДЕРА

*А.Н.Лезнов*

Сформулирована теория квантованного пространства – времени, симметричная по отношению к координатным и импульсным переменным, допускающая теоретико-групповую интерпретацию.

В теории квантованного пространства Снайдера [1] и теориях искривленного импульсного пространства [2,3] существенным образом нарушается симметрия между координатными и импульсными переменными: координаты $x_i$ и операторы Лоренцевских вращений $F_{ij}$ интерпретируются как инфинитезимальные операторы группы движений четырехмерного импульсного пространства постоянной кривизны. В настоящей заметке показано, как можно избежать этой асимметрии, рассматривая координаты $x_i$, импульсы $P_i$, операторы Лоренцевских вращений $F_{ij}$ и действие $1$ как инфинитезимальные операторы группы движений ненаблюдаемого шестимерного пространства определенной сигнатуры. Постулируем следующие коммутационные соотношения между $15$ введенными операторами $(x_i, p_i, F_{ij}, I)$:

$$[F_{ij}, F_{sk}] = i(g_{is}F_{jk} - g_{js}F_{ik} - g_{ik}F_{js} + g_{jk}F_{is}),$$

$$[F_{ij}, I] = 0,$$

$$[F_{ij}, x_s] = i(g_{is}x_j - g_{js}x_i), \quad [F_{ij}, p_s] = i(g_{is}p_j - g_{js}p_i),$$

$$[I, x_s] = i\ell_0^2 g_{sk}x_k, \qquad [I, p_s] = -im_0^2 g_{sk}x_k,$$

$$[x_s, x_j] = i\ell_0^2 F_{sj}, \qquad [p_s, p_j] = im_0^2 F_{sj}, \tag{1}$$

$$[p_s, x_j] = iIg_{sj}$$

$\ell_0$ – элементарная длина, $m_0$ – элементарный импульс ($\hbar = c = 1$); в классическом предельном случае ($\ell_0 \to 0$, $m_0 \to 0$) необходимо потребовать $I \to 1$ ($g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = 1$).

Коммутационные соотношения (1) изоморфны коммутационным соотношениям для инфинитезимальных операторов группы вращений $O(p, q)$ шестимерного пространства, причем при $\ell_0^2 > 0$, $m_0^2 > 0$ $-O(1,5)$, $\ell_0^2 > 0$, $m_0^2 < 0$ либо $m_0^2 > 0$, $\ell_0^2 < 0$ $-$ $O(2, 4)$ и, наконец, при $\ell_0^2 < 0$, $m_0^2 < 0$ $-O(3,3)$.

Каждое неприводимое представление группы шестимерных вращений однозначным образом определяется заданием собственных значений трех операторов Казимира $K_a^6$, которые в безразмерных операторах $T_{ij}(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$ имеют вид:

$$K_1^6 = \epsilon_{ijs\ell mn} T_{ij} T_{s\ell} T_{mn}, \; K_2^6 = (T_{ij})^2, \; K_3^6 = (\epsilon_{ijslmn} T_{s\ell} T_{mn})^2,$$

где $\epsilon_{ijs\ell mn}$ – совершенно антисимметричный тензор шестого ранга, а

$$T_{56} = l/m_0\ell_0, \; T_{6a} = x_a/\ell_0, \; T_{5a} = p_a/m_0, \; T_{a\beta} = F_{a\beta}$$
$$(1 \leqslant a, \beta \leqslant 4).$$

В "классическом" предельном случае $(m_0\ell_0)^2 K_2^6 \to \pm l^2$, поэтому для обеспечения правильного предельного перехода достаточно потребовать $K_2^6 = \pm(1/m_0\ell_0)^2$ (в зависимости от знака, с каким входит $(l/m_0\ell_0)^2$ в $K_2^6$). Для $K_1^6$ и $K_3^6$ получаем следующие предельные выражения:

$$K_1^6 (m_0\ell_0) \to \epsilon_{a\beta\gamma\delta} S_{a\beta} S_{\gamma\delta}, \; K_3^6 (m_0\ell_0)^2 \to (S_{a\beta})^2, \tag{2}$$

где $S_{a\beta} \equiv F_{a\beta} - (x_a p_\beta - p_a x_\beta)$, $\epsilon_{a\beta\gamma\delta}$ – совершенно антисимметричный тензор четвертого ранга. Из (2) следует, что с точностью до множителей $K_1^6$ и $K_3^6$ переходят в 2 оператора Казимира собственной группы Лоренца. Таким образом, три оператора Казимира задают неприводимое представление группы шестимерных вращений, описывающее в "классическом" предельном случае состояние, преобразующееся по определенному неприводимому представлению собственной группы Лоренца.

Операторы движений пространства $P_i$ и $F_{ij}$ образуют пятимерную подгруппу шестимерной группы вращений с операторами Казимира:

$$K_1^5 = (\epsilon_{ij\ell ms} T_{j\ell} T_{ms})^2, \; K_2^5 = (T_{ij})^2 \quad (1 \leqslant i, j \leqslant 5), \tag{3}$$

которые в "классическом" предельном случае переходят в квадрат массы и квадрат инвариантного спина. Поэтому задача определения спектра масс и спинов в данном варианте теории квантованного пространства сводится к нахождению собственных значений операторов Казимира подгруппы пятимерных вращений для заданного представления группы шестимерных вращений. Пока эта задача не решена.

Автор искренне благодарен участникам семинара, руководимого И.Е.Таммом, за обсуждение результатов работы; автор благодарен Ю.А.Гольфанду обратившего внимание автора на работу [4], где сфор-

мулирована система коммутационных соотношений [1], Д.А.Киржницу, А.А.Комару и В.И.Манько за ряд полезных дискуссий.

Поступило в редакцию
2 августа 1967 г.

## Литература

[1] H.Snyder. Phys. Rev., 71, 38, 1947.
[2] Ю.А.Гольфанд. ЖЭТФ, 37, 504, 1959; 43, 256, 1962.
[3] В.Г.Кадышевский. ЖЭТФ, 41, 1885, 1961; ДАН СССР, 147, 588, 1962.
[4] C.N.Yang. Phys. Rev., 72, 874, 1947.