О САМОМОДУЛЯЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПЛОСКИХ ВОЛН В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

В.И.Карпман

В нелинейной плоской волне, где все величины зависят от x и t только через фазу $\theta = kx - \omega t$ (такую волну мы будем называть стационарной), частота ω определяется не только волновым числом k, но и другими параметрами, которые в линейной теории считаются малыми. Мы рассмотрим здесь случай, когда к таким параметрам относится только амплитуда, т.е. предположим, что нелинейное дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega = \omega\,(k,^2\, a^2) \qquad (1)$$

(среда, для простоты, считается изотропной, а волна – линейно поляризованной). Свойства стационарных волн и, в частности, соотношение (1) обычно сравнительно просто получаются из общих уравнений, описывающих данное волновое поле.

В этой заметке рассматривается эволюция локальных возмущений нелинейных стационарных волн. При этом предполагается, что пространственный масштаб возмущения велик по сравнению с длиной волны, так что последнюю можно считать квазистационарной. Таким образом, амплитуда волны $a(x,t)$ является медленно меняющейся функцией, а фаза имеет вид $\theta = k_o x - \omega_o t + \phi\,(x,t)$, где k_o, ω_o – "невозмущенные" волновое число и частота, удовлетворяющие уравнению (1) при $a = a_o$ (a_o — невозмущенная амплитуда), причем $\phi_x/k_o, \phi_t/\omega_o$ — малые величины. Если амплитуду a считать также малой величиной, то система уравнений для a, ϕ с точностью до членов порядка a^2, $(\phi_x/k_o)^2$, включительно, имеет вид

$$\phi_\tau + \frac{1}{2}\phi_\xi^2 - \mu(a^2 - a_o^2) - \frac{1}{2a}a_{\xi\xi} = 0,$$
$$(a^2)_\tau + (a^2\phi_\xi)_\xi = 0, \qquad (2)$$

где

$$\xi = x - u_o t, \quad \tau = t u_o', \quad \mu = -\frac{1}{u_o'}\left(\frac{\partial\omega}{\partial a^2}\right)_{a=0,\, k=k_o},$$
$$u_o = \frac{\partial\omega(k_o, 0)}{\partial k_o}, \quad u_o' = \frac{\partial^2\omega(k_o, 0)}{\partial k_o^2} \qquad (3)$$

(ξ — координата в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью u_o относительно среды). Если в качестве (1) принять $\omega^2 = c^2k^2/(\epsilon_o + \epsilon'/E/^2)$, то получаются уравнения для слабомодулированных волн в нелинейной оптике [1,2].

Для малых возмущений ($a - a_o \ll a_o$, $\phi \ll 1$) из (2) следует дисперсионное уравнение вида:

$$\Omega = \frac{\kappa}{2}(\kappa^2 - \kappa_o^2)^{1/2}, \quad \kappa_o^2 = 4\mu a_o^2, \qquad (4)$$

где κ — волновое число возмущения. Таким образом, при $\mu > 0$ (именно этот случай рассматривается в дальнейшем), возмущения с $\kappa < \kappa_o$ экспоненциально нарастают, что означает модуляционную неустойчивость стационарной волны [3-5].

Пусть начальное возмущение определяется условиями

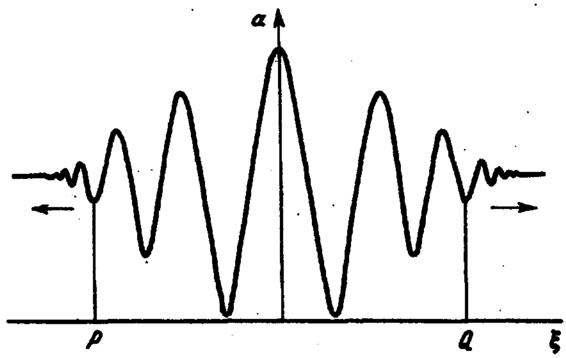
$$\phi(\xi, 0) = 0, \quad a(\xi, 0) = a_o[1 + f(\xi/\ell)], \qquad (5)$$

где $f(z)$ — четная функция, исчезающая при $z \to \infty$. Тогда асимптотический вид возмущения в линейной стадии процесса при $\xi \ll \kappa_o\tau$ будет следующим*

$$a = a_o + \text{const}\, \exp(\kappa_o^2\tau/4)\cos(\kappa_o\xi/\sqrt{2}). \qquad (6)$$

Выражение (6) описывает волну огибающей, неподвижную в рассматриваемой системе отсчета (т.е. распространяющуюся с групповой скоростью u_o относительно среды). В другом предельном случае

$\xi \gg \kappa_0 \tau$ получается выражение вида $a = a_0 + a_- + a_+$, где $a_\pm$ обозначают расходящиеся от центра волны огибающих с переменным волновым числом $\kappa(\xi, \tau) \gg \kappa_0$. Их локальная частота $\Omega(\xi, \tau)$ определяется через κ уравнением (4), групповые скорости $d\Omega/d\kappa$ равны ξ/τ, а амплитуды затухают при $\xi_\tau \to \pm\infty$ (явный вид выражений для $a_\pm$ из-за громоздкости здесь не приводятся).



В нелинейной стадии процесса существенную роль играют уединенные волны огибающих (солитоны), описываемые соотношениями

$$a = A \operatorname{sech}(A\sqrt{\mu}\xi), \qquad \phi = \frac{1}{2}\mu(A^2 - 2a_0^2)\tau, \tag{7}$$

которые, как известно [5-7], являются точными решениями уравнений (2).

Качественный анализ эволюции при достаточно больших τ, основанный на гипотезе об устойчивости солитонов (7), приводит к следующей картине (см. рисунок). Осцилляции амплитуды в центральной области, которые в линейной стадии имели вид (6), превращаются – по мере увеличения глубины модуляции – в солитоны (7). При удалении от центра ($\xi = 0$), ход амплитуды и фазы может быть асимптотически представлен в виде:

$$a = A\,\operatorname{dn}(A\sqrt{\mu}\xi, s), \qquad \phi = \frac{1}{2}\mu\int(A^2 + B^2 - 2a_0^2)\,d\tau,$$
$$s^2 = (A^2 - B^2)/A^2, \tag{8}$$

где $\operatorname{dn}(z,s)$ – эллиптическая функция Якоби, s – ее модуль, а величины A, B (A – $\max a$, B – $\min a$) являются медленно меняющимися (по сравнению с длинами модуляций) функциями ξ, τ. (При постоянных A, B выражения (8) являются, как и (7), точными решениями уравнений (2)). При $\xi \to 0$ величина B исчезает, и (8) превращается в (7). Область применимости выражений (8) заканчивается вблизи границ "глубоко промодулировавшейся" области PQ (см. рисунок). Вне этой области осцилляции амплитуды представляют собой расходящиеся волны, аналогичные тем, которые возникали в линейной стадии процесса при $\xi \gg \kappa_0\tau$. По мере удаления от точек P, Q групповые скорости расходящихся волн принимают асимптотический вид ξ/r. Можно также показать, что ширина области PQ растет быстрее, чем r (при $r \to \infty$); число солитонов, образующихся в центральной части PQ, при этом соответственно увеличивается.

Новосибирский
государственный университет

Поступило в редакцию
14 августа 1967 г.

Литература

[1] В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ, 2, 222, 1965.
[2] С.А.Ахманов, А.П.Сухоруков, Р.В.Хохлов. ЖЭТФ, 50, 1537, 1966.
[3] M.J.Lighthill. J.Inst. of Math. and Applications, 1, № 3, 1965.
[4] В.И.Беспалов, В.И.Таланов. Письма ЖЭТФ, 3, 471, 1966.
[5] Л.А.Островский. 51, 1189, 1966.
[6] В.И.Таланов. Изв. высш.уч.зав., Радиофизика, 7, 564, 1964.
[7] R.Y.Chiao, E.Garmire, C.H.Townes. Phys. Rev.Lett., 16, 479, 1964.

---

* Функцию $f(z)$ всегда можно выбрать такой, что (6) будет справедливым при достаточно больших r, ξ.