О ПРОВЕРКЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ФОРМУЛЫ БЬЕРКЕНА В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

А.И.Вайнштейн, Б.Л.Иоффе

В недавней работе [1] Бьеркеном была предложена формула, определяющая асимптотическое поведение матричного элемента $M_{\mu\nu}(p', k; p, q)$:

$$M_{\mu\nu}(p', k; p, q) = -i\int dx\, e^{ikx} \langle b|T\{V_\mu^+(x),\ V_\nu^-(o)\}|a\rangle, \qquad (1)$$

соответствующего амплитуде рассеяния W-бозона на произвольной мишени за счет слабого векторного тока V_μ^+. Согласно Бьеркену [1] при $k_0 \to \infty$ и фиксированных k, p, p' матричный элемент $M_{\mu\nu}$(1) выражается через одновременной коммутатор токов с помощью равенства

$$\lim_{k_0\to\infty} k_0 M_{\mu\nu}(p', k; p, q) = \int d\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{kx}} \langle b|[V_\mu^+(o, \mathbf{x}), V_\nu^-(o)]|a\rangle. \qquad (2)$$

Соотношение (2) может быть получено следующим образом. Введем в (1) суммирование по промежуточным состояниям и проинтегрируем по x_0. Тогда будем иметь

$$\int d\mathbf{x}\, e^{-i\mathbf{kx}} \sum_n \left\{ \frac{\langle b|V_\mu^+(o,\mathbf{x})|n\rangle\langle n|V_\nu^-(o)|a\rangle}{k_0 + p_0' - p_{n0}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\langle b|V_\nu^-(o)|n\rangle\langle n|V_\mu^+(o,\mathbf{x})|a\rangle}{k_0 - p_0 + p_{n0}} \right\}. \qquad (3)$$

Устремляя в (3) k_0 к бесконечности и пренебрегая p_{n0} по сравнению с k_0, приходим к (2).

Отметим, что при выводе вместо V_μ можно поставить любой другой оператор, и поэтому соотношение (2), казалось бы, можно применять к любым двум операторам. На самом деле ясно, что равенство (2) справедливо лишь в том случае, когда в сумме (3) и в сумме, возникающей после вынесения k_0, не играют роль сколь угодно большие промежуточные энергии p_{n0}. Это означает, что должны быть конечными амплитуда $M_{\mu\nu}$ и матричный элемент одновременного коммутатора.

Рассмотрим в качестве примера модель теории поля, в которой есть только нуклоны и нейтральные псевдоскалярные мезоны, и лагранжиан их взаимодействия равен

$$L = ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi. \qquad (4)$$

Векторный и аксиальный токи определим так:

$$V_\mu^\pm(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\tau^\pm\psi(x),$$
$$A_\mu^\pm(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\tau^\pm\psi(x). \qquad (5)$$

Вычислим в этой модели в g^2 –приближении асимптотическое выражение при $k \to \infty$ для матричного элемента $M_{\mu\nu}$, соответствующего рассеянию W^+ на протоне. После простых вычислений находим с логарифмической точностью $(\ln k^2/m^2 >> 1)$

$$M_{\mu\nu} = \bar{u}(p') \{ \gamma_\nu \hat{k}^{-1} \gamma_\mu - \frac{g^2}{8\pi} \ln \frac{k^2}{m^2} (\gamma_\nu \hat{k}^{-1} \gamma_\mu - \gamma_\mu \hat{k}^{-1} \gamma_\nu) \} u(p), \tag{6}$$

где $u(p)$ и $u(p')$ – спиноры начального и конечного состояний. Сопоставляя (6) с (2), нетрудно убедиться, что соотношение (2) выполняется для компонент $M_{o\nu}$ и $M_{\mu o}$ и нарушается для компонент M_{ik} $(i, k = 1, 2, 3, i \neq k)$*. При $i \neq k$ одновременнбй коммутатор равен

$$[V_i^+(x) V_k^-(o)]_{\substack{x_o = 0 \\ i \neq k}} = 2i\epsilon_{ik\ell} A_\ell(o)\, \delta(\mathbf{x}), \tag{7}$$

где $A_\ell(x)$ – пространственные компоненты аксиального изоскалярного тока. Подставляя (7) в (2) и вычисляя поправки g^2 – приближения к аксиальной вершине, мы получим из (2) выражение для M_{ik}, отличающееся от (6) заменой $\ln k^2/m^2$ на $\ln \Lambda^2/m^2$, где Λ – импульс обрезания. По-видимому, нарушение равенства (2) объясняется тем, что матричный элемент одновременного коммутатора в данном случае бесконечен. Амплитуда в силу сохранения векторного тока конечна и определяется интегралом, который сходится при импульсах порядка k. Поэтому соотношение (2) выполнено при $\Lambda \sim k$.

Рассмотрим теперь другой пример в той же модели – рассеяние W^+– бозона на протоне за счет аксиального тока. В том же g^2 – приближении при больших k матричный элемент для этого процесса имеет вид

$$M^A_{\mu\nu} = \bar{u}(p')\{(1 - \frac{g^2}{2\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{m^2})\gamma_\nu \hat{k}^{-1}\gamma_\mu + \frac{g^2}{8\pi}\ln\frac{k^2}{m^2}(3\gamma_\nu \hat{k}^{-1}\gamma_\mu +$$

$$+ \gamma_\mu \hat{k}^{-1}\gamma_\nu)\} u(p). \tag{8}$$

Из (8) следует при $k_0 \to \infty$

$$M^A_{0\nu} = \frac{1}{k_0}\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p)(1 - \frac{g^2}{2\pi}\ln\frac{\Lambda^2}{k^2}), \tag{9}$$

в то время, как из равенства типа (2) в силу коммутационных соотношений, мы имеем

$$M^A_{o\nu} = \frac{1}{k_0}\bar{u}(p')\gamma_\nu u(p). \tag{10}$$

(Правая часть (2) выражается в этом случае через вершинную функцию $\Gamma_\nu(p', p)$, поправки к которой в нашем приближении отсутствуют в силу сохранения векторного тока). Возникшее расхождение можно объяснить в данном случае тем, что матричный элемент $M^{A}_{\mu\nu}$ (8) не является конечной величиной. Если перенормировать $M^{A}_{\mu\nu}$, то бесконечные константы перенормировки войдут в правую часть соотношения типа (2), и ситуация станет аналогичной предыдущему примеру.

В результате мы приходим к выводу, что в рассмотренном нами приближении соотношение Бьеркена имеет место тогда, когда и левая и правая часть его являются конечными величинами. В случае слабых векторного и аксиального токов, в теории универсального $V-A$ – взаимодействия принимается, что затравочная константа этого взаимодействия конечна **. Поскольку константа перенормировки аксиального тока в $V-A$ – теории конечна, то рассмотренный нами пример говорит в пользу применимости соотношения Бьеркена к векторному и аксиальному токам в $V-A$ – теории. Применение, однако, этих соотношений к каким-либо другим операторам поля (например, к оператору пионного поля ϕ), перенормировка которых может быть бесконечна, вообще говоря, незаконно.

Авторы благодарны В.В.Соколову, И.Б.Хрипловичу и Е.П.Шабалину за обсуждения.

Поступило в редакцию
3 сентября 1967 г.

Литература

[1] J.D.Bjorken. Phys. Rev., 148, 1467, 1966.

---

* Соотношение (2) для $M_{o\nu}$ имеет вид $\lim k_o M_{o\nu} = 2\Gamma_\nu^{(3)}(p', p)$, где $\Gamma_\nu^{(3)}$ – вершинная функция, и непосредственно вытекает из соотношения $k_\mu M_{\mu\nu} = 2\Gamma_\nu^{(3)}$ использующего сохранение векторного тока.

** Все время речь идет о перенормировке только за счет сильных взаимодействий.