КОМПЕНСАЦИЯ БАЛОННОЙ МОДЫ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В ТОРОИДАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

В.Д.Шафранов

В тороидальных системах для удержания плазмы магнитные силовые линии выпуклы на наружной стороне тора и вогнуты на внутренней. Поэтому при конечном давлении плазмы здесь наряду с перестановочной неустойчивостью, развивающейся без искажения магнитных силовых трубок, возможна балонная неустойчивость, проявляющаяся в выпучивании силовых трубок на наружной стороне тора.

Но при конечном давлении плазмы в тороидальных системах существует и другой, полезный балонный эффект. Он состоит в смещении всего плазменного шнура к наружной стенке тора. Так как внутренние магнитные поверхности смещаются сильнее внешних, возникает ситуация, в которой тороидальная система обладает усредненной "магнитной ямой"– на внешних поверхностях среднее магнитное поле больше, чем на внутренних. Как показано ниже на примере двухзаходного стелларатора с круговой магнитной осью и системы с винтовой магнитной осью углубление магнитной ямы, связанное с давлением плазмы, компенсирует балонную неустойчивость в приближении идеальной проводимости плазмы.

Выражение для второй производной объема по продольному потоку магнитного поля $V''(\Phi)$, характеризующей глубину магнитной ямы, приведено в работе [1]. Оно является линейной функцией параметров магнитных поверхностей a_1, a_2, a_3, a_4. Значения этих параметров в отсутствие плазмы определены в [1]. Поправки на давление плазмы можно найти методом возмущений, как это сделано в §11 работы [1], где определено смещение магнитной оси при заданной внешней магнитной поверхности. В отличие от этого расчета теперь нужно считать закрепленной не внешнюю поверхность, а магнитную ось (поскольку формулы для V'' написаны в системе координат, где магнитная ось совпадает с

координатной). С этой целью следует положить константы C_1 и C_2 в выражении для связанного с давлением поперечного магнитного поля равными нулю.

Простой, но несколько громоздкий расчет приводит к следующему выражению для V'' в двухзаходном стеллараторе

$$V'' = -\frac{V'}{\pi B_0\sqrt{1-\epsilon^2}}\left\{\frac{11}{2}K^2 - \epsilon^2\delta'^2 - \frac{K^2\pi p'(8-6\epsilon^2-\epsilon^4)}{B_0\delta'^2\epsilon^4\sqrt{1-\epsilon^2}}\right\} + \frac{p'V'}{B_0^2} \equiv V''_0 + V''_p . \qquad (1)$$

Здесь B_0 – магнитное поле на оси, K – кривизна оси, ϵ – параметр, связанный с отношением полуосей ℓ_1, ℓ_2 эллиптических сечений магнитных поверхностей $\epsilon = (\ell_1^2 - \ell_2^2)/(\ell_1^2 + \ell_2^2)$; $\delta' \equiv kN$, N – полное число оборотов, совершаемых эллиптическим сечением при обходе тора. Давление в окрестности оси взято в виде разложения $p = p_0 + p'\Phi$, так что $p' < 0$. Как видно, $V''_p < 0$, что и соответствует углублению магнитной ямы из-за давления плазмы.

Для сравнения эффекта углубления ямы с эффектом балонной неустойчивости воспользуемся полученным Соловьевым [2] общим критерием устойчивости плазмы относительно локальных возмущений в окрестности магнитной оси

$$\frac{1}{4B_0^2}\left(\frac{\chi''}{V'}\right)^2 + \frac{1}{|\nabla\Phi|^2}\left\{p'\frac{V''}{V'} - \frac{p'^2}{B_0^2} - \left\langle\frac{(\rho\partial j_s/\partial\rho)^2}{|\nabla\Phi|^2}\right\rangle\right\} \geq 0. \qquad (2)$$

Здесь j_s – продольная плотность тока, ρ – расстояние от оси; штрихи обозначают производную по Φ, а угловые скобки – усреднение по объему слоя, заключенного между двумя близкими магнитными поверхностями. Первый член, содержащий вторую производную потока χ характеризует стабилизирующую роль "шира". Второе и третье слагаемые соответствуют перестановочной, а четвертое – балонной модам неустойчивости. Заметим, что последнее слагаемое в выражении (1) для V'', не зависящее от кривизны, описывает тривиальное углубление магнитной ямы из-за диамегнетизма плазмы, удерживаемой магнитным полем. Это слагаемое компенсируется вторым членом в фигурных скобках формулы (2) и, таким образом, выпадает из критерия устойчивости.

Выражение для j_s в окрестности магнитной оси приведено в работе [1] (формула 11.46). Использование этого выражения дает после соответствующего усреднения

$$\left\langle\frac{(\rho\partial j_s/\partial\rho)^2}{|\nabla\Phi|^2}\right\rangle = \frac{2k^2p'^2}{B_0^2\delta'^2\epsilon^4}\left(4\sqrt{1-\epsilon^2} + \epsilon^2\right). \qquad (3)$$

Если теперь объединить это слагаемое в критерии (2) со слагаемым, содержащим V''_p, то критерий устойчивости примет вид:

$$\frac{1}{4B_0^2}\left(\frac{\chi''}{V'}\right)^2 + \frac{1}{|\nabla\Phi|^2}\left\{p'\frac{V''_0}{V'} + \frac{k^2p'^2}{B_0^2\delta'^2\epsilon^4}f(\epsilon)\right\} \geq 0, \qquad (4)$$

где $$f(\epsilon) = \frac{8 - 6\epsilon^2 - \epsilon^4}{1 - \epsilon^2} - 8\sqrt{1 - \epsilon^2} - 2\epsilon^2 = 4\epsilon^2\left(1 + \frac{\epsilon^2}{2} + \ldots\right). \quad (5)$$

Как видно, $f(\epsilon) > 0$, т.е. эффект углубления магнитной ямы даже больше эффекта балонной неустойчивости.

В случае системы с винтовой магнитной осью, имеющей кривизну k и кручение κ последнее слагаемое в фигурных скобках критерия (4) заменяется на

$$\frac{k^2 p'^2}{B_0^2 \kappa^2 (1+\epsilon)}\left[\frac{2-\epsilon}{1-\epsilon^2} - \frac{2}{\epsilon}\left(1 - \sqrt{\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}}\right)\right] = \frac{k^2 p'^2}{B_0^2 \kappa^2}\epsilon^2\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon + \ldots\right) > 0, \quad (6)$$

Для обеих систем, таким образом, достаточным критерием устойчивости является наличие магнитной ямы в вакуумном магнитном поле. При этом никакого ограничения на давление плазмы не возникает. Более того, если вместо ямы в вакуумном поле имеется "магнитный бугор" ($V_0'' > 0$), то даже в этом случае плазма может стать устойчивой при достаточно большом давлении. Обозначим через Δ относительную высоту магнитного бугра, $\Delta = V_0'' \Phi / V'$, а через ι – угол вращательного преобразования (равный для рассмотренных систем, соответственно $\iota = N\epsilon^2/2$ и $\iota = \kappa L$, где L – длина магнитной оси системы). Тогда отношение давления плазмы к давлению магнитного поля $\beta = 2p'\Phi/B_0^2$, при котором произойдет самостабилизация плазмы в отсутствие шира, определится условием

$$\beta > \frac{2\iota^2 \Delta}{K^2 L^2 \epsilon^2} \cong \frac{2\Delta}{\epsilon^2}\left(\frac{\iota}{2\pi}\right)^2. \quad (7)$$

Приведенные примеры показывают, что критерий балонной неустойчивости, полученные на основе решения модельных задач [3,4], не дают правильного представления о роли этой неустойчивости в реальных тороидальных системах. Ранее уже было показано [5-7], что в системе токамак автоматически создаются условия, при которых балонная неустойчивость стабилизируется. Из приведенных выше результатов следует, что самостабилизация плазмы благодаря тороидальному эффекту осуществляется и в системах стелларaторного типа.

Поступило в редакцию
2 октября 1967 г.

Литература

[1] Л.С.Соловьев, В.Д.Шафранов. Вопросы теории плазмы. Госатомиздат. М., вып.5, стр.3, 1967.
[2] Л.С.Соловьев. ЖЭТФ, 54, вып.2, 1968 (в печати).
[3] H.P.Furth, M.N.Rosenbluth, B.Coppi. Proc. Int. Conf. on Controlled Thermonuclear Reactions, Culham, 1965; IAEA, Vienna, 1, 103, 1966.

[4] R.M.Kulsrud. Proc. Int. Conf. on Controlled Thermonuclear Reactions, Culham, 1965; IAEA, Vienna, 1, 127, 1966.
[5] C.Mercier. Int. Conf. Plasma Phys. and Control. Nucl. Fusion, paper. 95 (Salzburg), Sept., 1961.
[6] Б.Б.Кадомцев, О.П.Погуце. ДАН СССР, 170, 811, 1966.
[7] В.Д.Шафранов, Э.И.Юрченко. ЖЭТФ, 53, 1157, 1967.