ДВУХФОТОННЫЙ РАСПАД 2s - УРОВНЯ ВОДОРОДА

Б.А.Зон, Л.П.Рапопорт

Как известно, распад метастабильного $2s$-состояния водородоподобного атома в основном происходит за счет испускания двух фотонов с переходом атома в $1s$ -состояние. В последние годы достигнут значительный прогресс в экспериментальном изучении этого явления [1]. Теоретически спектр и время жизни перехода вычисляются путем численного суммирования рядов, поэтому известно только несколько точек спектра [2]. Цель данной заметки – дать полное аналитическое решение этой задачи путем использования явного выражения для функции Грина электрона в кулоновском поле в координатном представлении.

Вероятность излучения двух фотонов с частотами ω_1 и ω_2 в нерелятивистском пределе и дипольном приближении имеет вид* [3]:

$$dW = \frac{8a^2}{9\pi}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \sum_{M_1 M_2} \Big| \langle 1s \,|\, r\, Y_1^{M_2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) G_{E_{2s}-\omega_1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

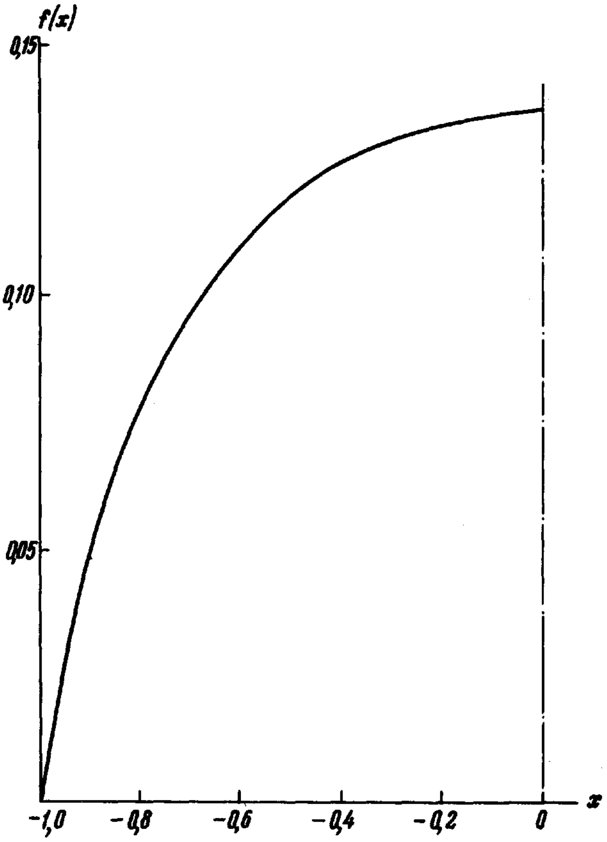
$$r' Y_1^{M_1 *}\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) | \, 2s\rangle + \langle 1s \,|\, r\, Y_1^{M_1}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) G_{E_{2s}-\omega_2}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$$

$$r' Y_1^{M_2 *}\left(\frac{\mathbf{r}'}{r'}\right) | \, 2s\rangle \Big|^2 (\omega_1 \omega_2)^3 \, d\omega_2 , \qquad (1)$$

где $G_E(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ – функция Грина уравнения Шредингера для атома водорода. Разлагая G_E в ряд по сферическим функциям получим следующее решение для радиальной функции Грина g_l, удовлетворяющее нужным граничным условиям ($g_l \sim r^l$ при $r \to 0$ и $g_l \to 0$ при $r \to \infty$)

$$g_l(E; r, r') = -\frac{ma\nu}{rr'}\frac{\Gamma(1+l-\nu)}{\Gamma(2l+2)} M_{\nu, l+1/2}\left(\frac{2r_<}{a\nu}\right) W_{\nu, l+1/2}\left(\frac{2r_>}{a\nu}\right), \quad (2)$$

где M и W – функции Уиттекера, $r>(<)$ – бо́льшая (меньшая) из величин r и r', a – боровский радиус, $\nu = Za\sqrt{-m/2E}$ – "главное кван-



товое число" электрона в виртуальном состоянии; в нашей задаче $1<\nu<2$. Для произведения функций Уиттекера удобно использовать интегральное представление, справедливое при $\nu < l+1$ [4]:

$$M_{\nu,\, l+1/2}\left(\frac{2r_<}{a\nu}\right) W_{\nu,\, l+1/2}\left(\frac{2r_>}{a\nu}\right) = \frac{2\sqrt{rr'}}{a\nu}\,\frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(l+1-\nu)}\,,$$

$$\int_0^\infty dx \exp\left(-\frac{r+r'}{a\nu}\operatorname{ch} x\right)\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)^{2\nu} I_{2l+1}\left(\frac{2\sqrt{rr'}}{a\nu}\operatorname{sh} x\right), \qquad (3)$$

где I – модифицированная функция Бесселя первого рода. Подстановка(2), (3) в (1) сводит вычисление матричных элементов к табличным интегралам:

$$dW(x) = \frac{2^8 Z^6 a^8}{3^8 \pi}\,\frac{mc^2}{\hbar} f(x)\, dx, \qquad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[4\sum_{l=1}^{2}\frac{\nu_l - 1}{\nu_l^2}\; {}_2F_1(1,-1-\nu_l;\,3-\nu_l;\,-\beta_l) - 1\right]^2, \qquad (5)$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция,

$$\beta_l = \frac{(\nu_l - 1)(2-\nu_l)}{(\nu_l+1)(\nu_l+2)}$$

ν_1 и ν_2 определяется через $x(|x| \leqslant 1)$ следующим образом: $\nu_1 = \sqrt{8/(5-3x)}$, $\nu_2 = \sqrt{8/(5+3x)}$ (при этом

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(E_{2s} - E_{1s})(1-x), \quad \omega_2 = \frac{1}{2}(E_{2s} - E_{1s})(1+x)\Big).$$

Легко видеть, что при любых ν $\beta \leqslant 1/35$. Ограничиваясь в разложении ${}_2F_1$ членами β получим: .

$$f(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[\frac{35-6x-9x^2-8\sqrt{2(5-3x)}}{11-9x+\sqrt{2(5-3x)}} + \frac{35+6x-9x^2-8\sqrt{2(5+3x)}}{11+9x+\sqrt{2(5+3x)}} - 1\right]^2 \qquad (6)$$

Точность этого выражения лучше 1%.

Таким образом, спектр определяется формулами (4) – (6) (см. рисунок). Ввиду эквивалентности фотонов полная вероятность перехода в единицу времени равна

$$W = \frac{1}{2}\,\frac{2^8 Z^6 a^8}{3^8 \pi}\,\frac{mc^2}{\hbar}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq 8{,}226\, Z^6\, сек^{-1}$$

что согласуется с [2].

Воронежский
государственный университет

Поступило в редакцию
14 октября 1967 г.

Литература

[1] M.Lipeles et al. Phys. Rev. Lett., 15, 690, 1965.
[2] G.Breit, E.Teller. Astrophys. J., 91, 238, 1940; L.Spitzer, J.Greenstein. Astrophys. J., 114, 407, 1951; I.Shapiro, G.Breit. Phys. Rev., 113, 179, 1959.
[3] А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика. §35.4, М., 1959.
[4] И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.

* Здесь $c = \hbar = 1$, $a \simeq 1/137$.