СИММЕТРИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЗАДАЧ

И.А.Малкин, В.И.Манько

В недавней работе [1] на примере нерелятивистской кулоновской задачи была показана польза применения высших симметрий. Дискретный спектр этой задачи можно связывать либо с неприводимым бесконечномерным представлением группы $O(4,1)$ [2], либо, что кажется более интересным, (см.[1]) с представлением группы $O(4,2)$ [3]. Чтобы понять связь внутренних симметрий с группой Лоренца, интересно изучить самые простые релятивистские модели [4]. В настоящей работе показано, что свободная дираковская частица обладает дополнительными интегралами движения, которые с угловым моментом образуют группу $SL(2,C)$ $SU(2)$-симметрии. Показано, что волновые функции, принадлежащие одному уровню энергии, реализуют не вполне приводимое бесконечномерное представление группы $SL(2,C)$. В релятивистской кулоновской задаче ранее [5] был найден дополнительный интеграл движения, и его физический смысл был объяснен Биденхарном [6]. В настоящей статье построен еще один интеграл движения, который вместе с имевшимся образует группу $SU(2)$-симметрии. Существование этой группы объясняет хорошо известное двойное вырождение релятивистской кулоновской задачи. Гамильтониан для свободного дираковского уравнения

$$(-\rho_2 \vec{\sigma}\, \vec{\nabla} + \rho_3 E - m)\psi = 0\,; \quad (\hbar = c = 1) \tag{1}$$

коммутирует с угловым моментом $\mathbf{j}$ и оператором Дирака $K = \rho_3(\vec{\sigma}\vec{L} + 1)$. Для состояний с фиксированной энергией имеется бесконечный набор волновых функций с $j = 1/2, 3/2, 5/2 \ldots$ и $k = \pm|j + 1/2|$, (где k – собственное значение оператора Дирака), образующий базис пространства H. Легко проверить, что операторы

$$X_1 = \frac{\vec{\sigma}\mathbf{p}}{|p|}\,; \quad X_2 = \frac{\rho_3 \vec{\sigma}\mathbf{A}}{|k|}\,; \quad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{L}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{L}}{2|p|}\,; \quad X_3 = \frac{K}{|k|} \tag{2}$$

коммутируют с угловым моментом $\mathbf{j}$, свободным Гамильтонианом и удовлетворяют соотношениям

$$[X_i\, X_k] = 2i\epsilon_{ik\ell} X_\ell\,; \quad [X_i X_k]_+ = 2\delta_{ik}\,; \quad (i, k = 1 \ldots 3). \tag{3}$$

В двумерном пространстве состояний с фиксированной энергией, $\mathbf{j}^2$ и j_z эти операторы являются обычными σ_i -матрицами Паули. Определим три оператора

$$\mathbf{L}' = \frac{1}{2}[2\mathbf{L} + \vec{\sigma} - \mathbf{p}\frac{\vec{\sigma}\mathbf{p}}{p^2} + \rho_3(\vec{\sigma} - \mathbf{p}\frac{\vec{\sigma}\mathbf{p}}{p^2})]\,;$$

$$\Sigma' = -\rho_3 \vec{\sigma} + p \frac{\vec{\sigma} p}{|p|^2} + \rho_3 p \frac{\vec{\sigma} p}{p^2} ;$$

$$A' = \frac{1}{2|p|} [pL' - L'p]. \qquad (4)$$

Они коммутируют с Гамильтонианом и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$L'L' = -A'A' = iL'; \; L'A' + A'L' = 2iA';$$

$$[L'_i \Sigma'_k = [A'_i \Sigma'_k] = 0 \qquad \Sigma'\Sigma' = 2i\Sigma'. \qquad (5)$$

Операторы (4) образуют группу $SL(2,C)\,SU(2)$-симметрии. (Операторы Казимира в этом случае $(L' + iA')^2 = (L' - iA')^2 = -1, \; (\Sigma')^2 = 3)$.

Рассмотрим два оператора:

$$J = L' + \frac{1}{2} \vec{\Sigma}'; \; K = A' + \frac{i}{2} \vec{\Sigma}', \qquad (6)$$

подчиняющихся коммутационным соотношениям группы $SL(2, C)$

$$J\,J = -KK = iJ\; ; \; J\,K + K\,J = 2iK\,. \qquad (7)$$

Оператор J есть оператор углового момента. Два оператора Казимира для этой группы

$$i_1 = (J + iK)^2 ; \; i_2 = (J - iK)^2 \qquad (8)$$

определяют представление этой группы $SL(2,C)$ [7].

Простой расчет дает

$$i_1 = -1; \quad i_2 = -2(1 + X_1)K; \quad i_2^2 = 0. \qquad (9)$$

Это означает, что данное представление не является вполне приводимым. В упомянутом двумерном пространстве оператор i_2 может быть приведен лишь к треугольному виду.

Представления группы $SL(2,C)$ этого типа впервые были изучены Д.П.Желобенко [8]. Существование этих представлений в свободном уравнении Дирака вызвано его релятивистски-инвариантным характером, так же как и независимость параметров i_1 и i_2 от энергии. Кажется вероятным, что трудности в релятивизации группы $SU(6)$-симметрии, а также в релятивистской трактовке внутренних симметрий могут быть связаны с тем, что всегда использовались только неприводимые представления. Рассмотренный простой пример показывает, что для релятивистской инвариантности необходимо использование и не вполне приводимых представлений. С формальной точки зрения, появление не вполне приводимого представления вызвано тем, что метрика в пространстве H не положительно-определенная $(u^+ \gamma^0 u = 2m)$.

Состояния дираковских частиц в кулоновском поле полностью аналогичны состояниям свободной частицы [6] и, следовательно, обладают симметрией $SL(2,C)\,SU(2)$ -симметрии. В кулоновском поле также существует группа $SU(2)$ -симметрии несколько измененных операторов [2].

Оператор

$$X_2' = [K^2(H^2 - m^2) + \ell^4 Z^2 m^2]^{-1/2} [-iK\rho_1(H - m\rho_3) - \ell^2 mZ \frac{\vec{\sigma}\vec{r}}{r}] \quad (10)$$

является интегралом движения в релятивистской кулоновской задаче [5].

Оператор

$$X_1' = [(H^2 - m^2)K^4 + \ell^4 Z^2 m^2 K^2]^{-1/2} [K^2\rho_1(H - m\rho_3) - i\ell^2 mZ \frac{K\vec{\sigma}\vec{r}}{r}] \quad (11)$$

также интеграл движения.

Операторы $X_1'\,X_2'\,X_3$ подчиняются коммутационным соотношениям (3). Существование группы симметрии $SU(2)$-симметрии в релятивистской кулоновской задаче объясняет двукратное вырождение по числу j. Детали расчетов будут опубликованы.

Авторы благодарны А.М.Балдину, А.А.Комару и М.А.Маркову за полезное обсуждение.

Физический институт
им.П.Н.Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
29 ноября 1967 г.

Литература

[1] A.O.Barut, H.Kleinert. Phys. Rev., 156, 1541, 1967; 157, 1180, 1967; 160, 1147, 1967.

[2] B.Vitale. Lecture Notes. Madras, 1966.

[3] И.А.Малкин, В.И.Манько. Письма ЖЭТФ, 2, 230, 1965; ЯФ, 3, 372, 1966.

[4] I.A.Malkin, V.I.Manko. Preprint PhI AN № 128, 1967.

[5] M.H.Johnson, B.A.Lippmann. Phys. Rev., 78, A329, 1950.

[6] L.C.Biedenharn. Phys. Rev., 126, 845, 1962.

[7] M.A.Naimark. Linear Representations of the Lorentz Group. London, 1964.

[8] D.P.Zelobenko. Dokl. Acad. Nauk SSSR, 126, 935, 1959.